Polynômes et fonctions rationnelles.

Définitions.

Un monôme est une fonction du type $x \to a\,x^n$ où $n \in \mathbb{N}$.

Si $a \neq 0$, n est le degré. On note $d\,°\,P = n$.

La fonction nulle n'a pas de degré.

Les fonctions constantes sont de degré 0.

Degré 1 : fonctions linéaires.

Degré 2 : $x \to a\,x^{2,}$ $a \neq 0$.

Un polynôme est une somme de monômes.

Sous la forme développée et réduite, son degré est celui du monôme de plus haut degré, monôme dominant.

Degré 1 : fonctions affines

Degré 2 : $x \to a\,x^2 + b\,x + c\,,\ \ a \neq 0.$

Degré 3 : $x \to a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d\,,\ \ a \neq 0.$

Degré n : $x \to a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0 = \sum_{p=0}^{p=n} a_p x^p,\ \ a^n \neq 0$

Cette écriture est la forme développée réduite, il existe d'autres écritures.

Une fonction rationnelle est un rapport de deux polynôme.

Exemple : $f : x \to \dfrac{5\,x^2 + 4\,x - 1}{7\,x + 2}$

Unicité.

Théorème admis.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0 = \sum_{p=0}^{p=n} a_p x^p,\ \ a^n \neq 0$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2\,x^2 + b_1\,x + b_0 = \sum_{p=0}^{p=m} b_p x^p,\ \ b^m \neq 0$$

$P = Q \ \Leftrightarrow\ n = m$ et pour tout $p \leqslant n\,,\ a_p = b_{p.}$

Degré.

$d\,°(P+Q) \leqslant max(d\,°\,P\,;\,d\,°\,Q).$

$d\,°(PQ) = d\,°\,P + d\,°\,Q.$

Racine.

Définition.

a est une racine de f signifie $f(a) = 0.$

Théorème.

Si P est un polynôme et a une racine de P alors on peut factoriser $P(x)$ par $x - a.$

$P(x) = (x-a)Q(x)$ et Q est un polynôme tel que $d\,°\,Q = d\,°\,P - 1.$.

Conséquence.

Méthode d'identification.

Pour démontrer que deux écritures représentent le même polynôme on développe et réduit les deux écritures et on dit que les coefficients des monômes de même degré sont égaux.

Exemple.

La tangente T à la courbe C de f au point d'abscisse -2 *a pour équation :*

$y=-27x-6$.

On cherche la positon respective de la courbe et de la tangente.

On cherche le signe de $f(x)-(-27x-6)$ au voisinage de -2.

$g(x)=f(x)-(-27x-6)=x^3+6x^2-15x+2+27x+2=x^3+6x^2+12x+8$

La tangente et la courbe sont confondues au point d'abscisse -2 donc -2 est une racine de g. Donc il existe un polynôme Q de degré deux tel que :

$$g(x)=(x+2)Q(x)$$

$(x+2)Q(x)=(x+2)(ax^2+bx+c)=ax^3+(2a+b)x^2+(2b+c)x+2c$

On identifie $g(x)$ et $(x+2)Q(x)$ et on obtient le système linéaire :

$$\left|\begin{array}{l} a=1 \\ 2\mathrm{a}+b=6 \\ 2\mathrm{b}+c=12 \\ 2\mathrm{c}=8 \end{array}\right.$$

4 équations et 3 inconnues ce système n'a en général pas de solution. C'est normal, nous sommes dans le cas particulier où 2 est une racine. Si on prend *a* quelconque, en général $(x-a)$ n'est pas un facteur de *g*.

Résolution.

$$\left|\begin{array}{l} a=1 \\ b=4 \\ 2\times 4+4=12 \\ c=4 \end{array}\right.$$

Donc $Q(x)=x^2+4x+4=(x+2)^2$ et $g(x)=(x+2)^3$

Mais c'est comme on dit en français la méthode bourrin, de gros et longs calculs. L'avantage de cette méthode est qu'elle fonctionne toujours.

La méthode rusée : x^3 et 8 sont des cubes, 6 et 12 sont divisibles par 3.

Identité remarquable ? Vérifions :

$$g(x)=x^3+6x^2+12x+8=x^3+3\times 2x^2+3\times 2^2x+2^3=(x+2)^3$$

Pour $x < -2$, $g(x) < 0$ donc la courbe *C* est **en** dessous de la tangente *T*.

Pour $x > -2$, $g(x) > 0$ donc la courbe *C* est **au** dessus de la tangente *T*.

Application au fonctions rationnelles.

Méthode.

Pour identifier « deux » fonctions rationnelles on les réduit au même dénominateur puis on identifie les numérateurs.