Les proportions.

Fractions. Pourcentages. Théorème de Thalès. Fonctions linéaires. Equations d'une droite. Fonctions affines.

I Tableau de proportions

1 Définition.

Soit le tableau T ci-dessous.

x_1	x_2	x_3	...	x_n
y_1	y_2	y_3	...	y_n

a) Cas général.
Aucun terme de la première ligne n'est nul. $x_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq n$.

T est un tableau de proportions signifie que les *fractions* $\frac{y_1}{x_1}, \frac{y_2}{x_2}, \frac{y_3}{x_3}, \ldots, \frac{y_n}{x_n}$ sont égales.

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots = \frac{y_n}{x_n}$$

b) Cas particulier.
T est un tableau de proportions signifie que :
quand un terme de la première ligne est nul alors le terme correspondant de la deuxième ligne est nul. $x_k = 0 \Rightarrow y_k = 0$ pour $1 \leq k \leq n$.
les termes non nuls vérifient le cas général.

c) Quand $x_1 \neq 0$ la fraction $\frac{y_1}{x_1} = p$ (ou $\frac{y_2}{x_2}$ ou...) est appelé le *coefficient de proportionnalité*.

$$y_i = p x_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

Pour la suite on considère que les tableaux ont au plus un zéro sur une ligne.

2 Déterminant.

On travaille sur un tableau carré que l'on note M.

a	b
c	d

Définition. Le *déterminant* de ce tableau, M, est la quantité ad – bc.

Théorème.
M est un tableau de proportions si et seulement si le déterminant est nul.
ad – bc = 0.

Démonstration
Condition nécessaire. M est un tableau de proportions donc :
ou $a = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow ad - bc = 0$
ou $b = 0 \Rightarrow d = 0 \Rightarrow ad - bc = 0$

ou a ≠ 0 et b ≠ 0 ⇒ $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$ ⇒ ad = bc ⇒ ad – bc = 0

Condition suffisante. ad – bc = 0 donc :

ou a = 0 ⇒ bc = 0 ⇒ c = 0 (car a et b ne peuvent pas être tous les deux nuls) et M vérifie la définition.
ou b = 0 ⇒ bc = 0 ⇒ d = 0 et M vérifie la définition.
ou a ≠ 0 et b ≠ 0 ⇒ ad – bc = 0 ⇒ ad = bc ⇒ $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ C.Q.F.D.

Conséquence. Le premier tableau est un tableau de proportion si et seulement si tous les déterminants de la forme $x_i y_j - x_j y_i$, pour 1≤ i ≤ n et 1≤ j ≤ n, sont nuls.

Tout le monde aura reconnu le fameux produit en croix malgré son déguisement.

3 Technique.

Recherche de la quatrième proportionnelle, x, dans le tableau suivant noté M.

a	b
c	x

On se place dans le cas ou a n'est pas nul.
M est un tableau de proportion donc sont déterminant est nul.

$ax-bc=0 \Rightarrow ax=bc \Rightarrow x=\frac{bc}{a}$. On retrouve bien la règle habituelle.

4 Propriétés.

Théorème.
Soit M le tableau de proportions ci-dessous.

a	b
c	d

Le tableau N ci-dessous est un tableau de proportions.

a	b	a + b	a – b
c	d	c + d	c – d

Démonstration.
M est un tableau de proportion donc son déterminant est nul.
ad – bc = 0.
Montrons que le déterminant a(c+d) – c(a+b) est nul.
a(c+d) – c(a+b) = ac + ad – ca – cb = ad – bc = 0.
Montrons que le déterminant b(c+d) – d(a+b) est nul.
b(c+d) – d(a+b) = bc + bd – da – db = ad – bc = 0.
Nous laissons au lecteur le soin de démontrer lui-même les autres égalités.

II Les pourcentages.

1 Définition.

la quantité a est égale à t% de b signifie que le tableau, M, ci-dessous est un tableau de proportion.

a	t
b	100

2 Technique.

Calcul de t% de b. D'après le I3 : $a = \frac{t}{100} b.$

Calcule du taux de pourcentage, t, que représente a par rapport à b.
On construit le tableau de proportion, M, où t est l'inconnue.

a	t
b	100

M est un tableau de proportions donc son déterminant est nul. 100a – bt = 0.
On résout cette équation à une inconnue, t.

3 La règle des pourcentages.

Ajouter (ou augmenter de) t% c'est multiplier par $k = (1 + \frac{t}{100}).$

Retrancher (ou baisser de) t% c'est multiplier par $k = (1 - \frac{t}{100}).$

k est appelé le *coefficient multiplicateur.*

Exemples.

a Le carburant a subi deux augmentations successives, la première de 12% et la deuxième de 9%.

Calcul du pourcentage d'augmentation total, *t*.
A la première hausse le prix a été multiplié par k = (1 +) = 1,12.
A la deuxième hausse le prix a été multiplié par l = (1 +) = 1,09.
En tout le prix a été multiplié par $k\,l$ = 1,12 x 1,09 = 1,2208

$$1 + \frac{t}{100} = 1{,}2208 \Rightarrow \frac{t}{100} = 1{,}2208 - 1 \Rightarrow t = 22{,}08$$

Le carburant a augmenté de 22,08%.

b Une population augmente de 30% puis diminue de 30%. Est-elle restée globalement stable ?

Calcul du pourcentage d'augmentation total, *t*.
Durant la première période la population a été multipliée par k = 1,3.
Durant la deuxième période la population a été multipliée par l = 0,7.
En tout la population a été multipliée par $k\,l$ = 1,3 x 0,7 = 0,91

$$1 + \frac{t}{100} = 0{,}91 \Rightarrow \frac{t}{100} = 0{,}91 - 1 \Rightarrow t = -9$$ La population a diminué de 9%.

III Le théorème de Thalès.

1) Le théorème.

Soit d et d' deux droites sécantes en O. Deux droites, δ_1 et δ_2, coupent respectivement d en A et B et d' en A' et B'. Si δ_1 et δ_2 sont parallèles alors le tableau ci-dessous, M, est un tableau de proportions.

OA	OB	AB
OA'	OB'	A'B'

On dit aussi que les triangles, OAB et OA'B', sont semblables. L'un est une réduction (modèle réduit) de l'autre. Le rapport de proportion est l'échelle (comme pour les cartes de géographie ou routières).

2) La réciproque.

Soit O,A et B trois points alignés sur d et O,A' et B' trois points alignés dans le même ordre que O,A'et B'.
Soit le tableau M ci-dessous.

OA	OB
OA'	OB'

Si M est un tableau de proportions alors les droites (AA') et (BB') sont parallèles.

3) Variante du théorème.

Sous les mêmes hypothèses on peut conclure : le tableau ci-dessous est un tableau de proportions.

OA	AB
OA'	A'B'

Suivant la disposition des points, AB est la somme ou une différence de OA et OB. On applique I4.

IV Fonctions linéaires.

1 Fonctions.

Une fonction, notée f, exprime une quantité y en fonction d'une quantité x à l'aide d'une « formule » f(x). x appartient à un ensemble E, appelé ensemble de départ, et f(x) (ou y) appartient à un ensemble F, appelé ensemble d'arrivée.

Notation. $f : E \longrightarrow F$
$x \longrightarrow f(x)$.

Exemple. La fonction f, « aire d'un carré » en fonction de la longueur du côté x.
Une longueur est toujours positive donc x est un nombre réel positif. L'ensemble de départ est IR^+, ensemble des nombres réels positifs. Pour l'ensemble d'arrivée on peut choisir IR ou IR^+.

$$f : IR^+ \longrightarrow IR$$
$$x \longrightarrow x^2$$

On note aussi : $f(x) = x^2$.

2 Fonctions linéaires.

Une fonction f, de IR dans IR, est linéaire signifie que son tableau de valeurs ci-dessous, M, est un tableau de proportion.

x	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

Exemple. La fonction « double ».

$$f : IR \longrightarrow IR$$
$$x \longrightarrow 2x$$

ou encore : $f(x) = 2x$.
Tableau de valeurs :

x	0	1	...	x
f(x)	0	2	...	2x

Si on appelle p le coefficient de proportionnalité du tableau de valeurs d'une fonction linéaire f alors $f(x) = px$.

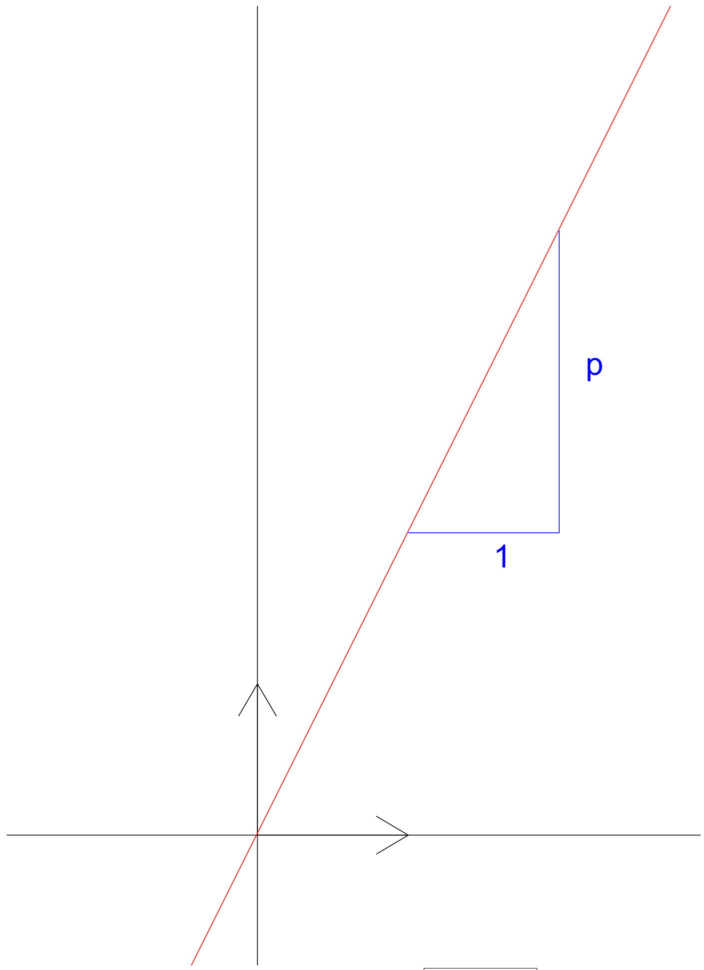
3 Représentation graphique d'une fonction linéaire f.

Soit f une fonction linéaire. $f : IR \longrightarrow IR$
$x \longrightarrow px$.

Le plan est muni d'un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Chaque couple (x, f(x)) est représenté dans le plan par un point M de coordonnées (x, y = f(x)). Cet ensemble de point forme une courbe appelée représentation graphique de la fonction f.

Point	O	A	B	C
abscisse x	*0*	*1*	*2*	*3*
ordonnée y = f(x)	*0*	*p*	*2p*	*3p*

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite passant par l'origine.



Son coefficient directeur est p et son équation réduite est $\boxed{y = px.}$
Quand x augmente de 1, y augmente de p.