Relation d'ordre et variations d'une fonction.

Toutes les fonctions sont définies sur un même intervalle I.

I Définitions.

1 Croissance.

f est croissante sur I si elle respecte (ne change pas) l'ordre ($\leqslant$ ou $\geqslant$).

Pour tout couple $(x_1 ; x_2)$, $x_1 \in I$ et $x_1 \in I$, $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

2 Décroissance.

f est décroissante sur I si elle change l'ordre.

Pour tout couple $(x_1 ; x_2)$, $x_1 \in I$ et $x_1 \in I$, $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

3 Croissance stricte.

f est strictement croissante sur I si elle respecte (ne change pas) l'ordre strict (< ou >).

Pour tout couple $(x_1 ; x_2)$, $x_1 \in I$ et $x_1 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

4 Décroissance stricte.

f est strictement décroissante sur I si elle change l'ordre strict (< ou >).

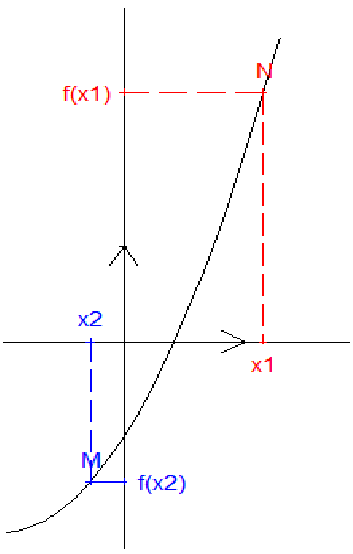
Pour tout couple $(x_1 ; x_2)$, $x_1 \in I$ et $x_1 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

5 "Constance".

f est constante sur I si pour tout couple $(x_1 ; x_2)$, $x_1 \in I$ et $x_1 \in I$, $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

6 Remarque importante.

L'ordre de x_1 et x_2 importe peu. On peut choisir x_1 supérieur à x_2 ou inférieur.
Pour savoir si f est croissante ou décroissante on compare l'ordre des x et l'ordre des images.



Sur le schéma de gauche :

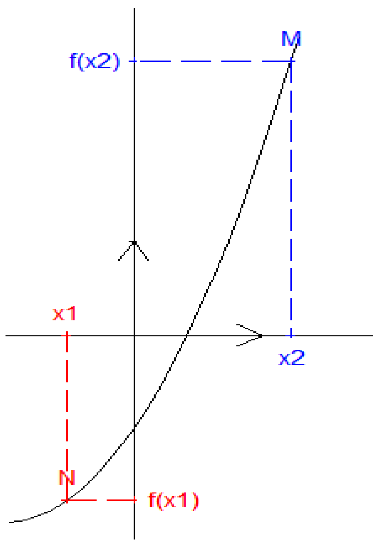
$x_1 > x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$

f est strictement croissante.

Sur le schéma de droite :

$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$

f est strictement croissante.



II Propriétés de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ et variations.

Dans tout ce paragraphe on peut remplacer $\leqslant$ par $\geqslant$.
On peut remplacer $\leqslant$ par $<$ ou par $>$ et dans ce cas remplacer croissante par strictement croissante et décroissante par strictement décroissante.

1 Somme.

a Cas général.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} a\leqslant b \\ c\leqslant d \end{array}\right\} \Rightarrow \ a+c\leqslant b+d \quad \text{donc} \left\{\begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ croissantes } \Rightarrow f+g \text{ croissante} \\ f \text{ et } g \text{ décroissantes } \Rightarrow f+g \text{ décroissante} \end{array}\right.} \quad (1)$$

b Cas particuliers.

g est définie par : *g(x) = f(x) + c*

$$\boxed{a\leqslant b \Rightarrow a+c\leqslant b+c \quad \text{donc} \left\{\begin{array}{l} f \text{ croissante } \Rightarrow g \text{ croissante} \\ f \text{ décroissante } \Rightarrow g \text{ décroissante} \end{array}\right.} \quad (1 \text{ bis})$$

g est définie par : *g(x) = f(x) - c*

$$\boxed{a\leqslant b \Rightarrow a-c\leqslant b-c \quad \text{donc} \left\{\begin{array}{l} f \text{ croissante } \Rightarrow g \text{ croissante} \\ f \text{ décroissante } \Rightarrow g \text{ décroissante} \end{array}\right.} \quad (1 \text{ ter})$$

c Opposé.

$$\boxed{a\leqslant b \Rightarrow -a\geqslant -b \quad \text{donc} \left\{\begin{array}{l} f \text{ croissante } \Rightarrow -f \text{ décroissante} \\ f \text{ décroissante } \Rightarrow -f \text{ croissante} \end{array}\right.} \quad (2)$$

d Remarque importante.

On ne peut pas soustraire des égalités membre à membre si *f* et *g* sont croissantes ou décroissantes on ne peut rien conclure pour *f-g*.

2 Produit.

Rappel : une fonction *f* est positive sur *I* si pour tout *x* de *I*, $f(x)\geqslant 0$.

a Cas général.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} 0 < a\leqslant b \\ 0 < c\leqslant d \end{array}\right\} \Rightarrow \ ac\leqslant bd \ \text{donc} \left\{\begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ croissantes et strictement positives } \Rightarrow fg \text{ croissante} \\ f \text{ et } g \text{ décroissantes et strictement positives } \Rightarrow fg \text{ décroissante} \end{array}\right.} \quad (3)$$

b Cas particulier.

g est définie par : *g(x) = k f(x)*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} a\leqslant b \\ k>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ ka\leqslant kb \quad \text{donc} \left\{\begin{array}{l} f \text{ croissante } \Rightarrow kf \text{ croissante} \\ f \text{ décroissante } \Rightarrow kf \text{ décroissante} \end{array}\right.} \quad (3 \text{ bis})$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} a \leqslant b \\ k<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad ka \geqslant kb \quad \text{donc} \left\{\begin{array}{l} f \text{ croissante } \Rightarrow kf \text{ décroissante} \\ f \text{ décroissante } \Rightarrow kf \text{ croissante} \end{array}\right.} \quad \text{(3 bis)}$$

c Inverse.

$$\boxed{0<a \leqslant b \Rightarrow \frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b} \quad \text{donc} \left\{\begin{array}{l} f \text{ croissante et strictement positive } \Rightarrow \frac{1}{f} \text{ décroissante} \\ f \text{ décroissante et strictement positive } \Rightarrow \frac{1}{f} \text{ croissante} \end{array}\right.} \quad (4)$$

d Remarques importantes.

On ne peut travailler, sauf quand on multiplie par un réel k, qu'avec des fonctions strictement positives.
On ne peut pas diviser des égalités membre à membre, si *f* et *g* sont croissantes ou décroissantes on ne peut rien conclure pour $\frac{f}{g}$

III Exemples.

<u>*1 Soit f définie sur*</u> $\mathbb{R}$ <u>*par :*</u> $x \longrightarrow x^2$

Sur] 0 ; +∞ [, $g: x \longrightarrow x$ est strictement croissante et strictement positive donc, d'après (3), *f* = *gg* est strictement croissante.
Sur] -∞ ; 0 [, $g: x \longrightarrow x$ est strictement croissante et strictement négative donc -*g* est strictement décroissante et strictement positive donc *f* = *(-g)(-g)* est strictement décroissante.

<u>*2 Soit f définie sur*</u> $]-\infty ; 0[\cup] 0 ; -\infty[$ <u>*par :*</u> $x \longrightarrow \frac{1}{x}$

Sur] 0 ; +∞ [, $g: x \longrightarrow x$ est strictement croissante et strictement positive donc, d'après (4) $f=\frac{1}{g}$ est strictement décroissante.
Sur] -∞ ; 0 [, $g: x \longrightarrow x$ est strictement croissante et strictement négative donc -*g* est strictement décroissante et strictement positive donc $-f=\frac{1}{-g}$ est strictement croissante et *f* est strictement décroissante.

<u>*3 Soit f définie sur*</u> $\mathbb{R}$ <u>*par :*</u> $x \longrightarrow x^2+2x-5$

Sur] 0 ; +∞ [, $g: x \longrightarrow 2x$ et $h: x \longrightarrow x^2$ sont strictement croissantes donc *f* est strictement croissante.
Sur] -∞ ; 0 [, $g: x \longrightarrow 2x$ est strictement croissante et $h: x \longrightarrow x^2$ est strictement décroissante on ne peut pas conclure.

On peut changer la forme de *f(x)*.

$$f(x)=x^2+2x-5=x^2+2x+1-1-5=(x+1)^2-6$$

On applique la même méthode que pour l'exemple 1.

Sur] -1 ; +∞ [, $g : x \longrightarrow x+1$ est strictement croissante et strictement positive donc *gg* est strictement croissante et d'après (1 ter) *f* est strictement croissante.

Sur] -∞ ; -1 [, $g : x \longrightarrow x+1$ est strictement croissante et strictement négative donc *-g* est strictement décroissante et strictement positive donc *(-g)(-g)* est strictement décroissante et *f* aussi.