Exercice I

10 points

Etude d'une fonction.

Soit a fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1_a On fait apparaître le dénominateur au numérateur puis on simplifie :

$$f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}=x-\frac{e^x+1\ -2}{e^x+1}=x-\frac{e^x+1}{e^x+1}-\frac{-2}{e^x+1}=x-1+\frac{2}{e^x+1}$$

$$f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}=x-\frac{-e^x-1\ +2\ e^x}{e^x+1}=x+\frac{e^x+1}{e^x+1}-\frac{2\ e^x}{e^x+1}=x+1-\frac{2\ e^x}{e^x+1}$$

1_b Limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Il faut choisir la bonne écriture.

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+1}=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)+\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+1}=+\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x=0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{2\ e^x}{e^x+1}=0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+1)-\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ e^x}{e^x+1}=-\infty.$$

1_c Les asymptotes obliques apparaissent dans les écritures de f.

$f(x)-(x-1)=\dfrac{2}{e^x+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x+1}=0$ donc Δ_2 d'équation $y=x-1$ est asymptote à C en $+\infty$.

$f(x)-(x+1)=\dfrac{-2\ e^x}{e^x+1}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2\ e^x}{e^x+1}=0$ donc Δ_1 d'équation $y=x+1$ est asymptote à C en $-\infty$.

1_d Positions relatives de C par rapport au droites Δ_1 et Δ_2.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x>0$.

$f(x)-(x-1)=\dfrac{2}{e^x+1}>0$ donc C est au dessus Δ_2

$f(x)-(x+1)=\dfrac{-2\ e^x}{e^x+1}<0$ donc C est en dessous Δ_1

2_a La fonction *f* est impaire.

$e^x e^{-x} = e^0 = 1$

$$f(-x) = -x - \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = -x - \frac{e^{-x}(1-e^x)}{e^{-x}(1+e^x)} = -x - \frac{1-e^x}{1+e^x} = -x + \frac{e^x-1}{1+e^x} = -f(x).$$

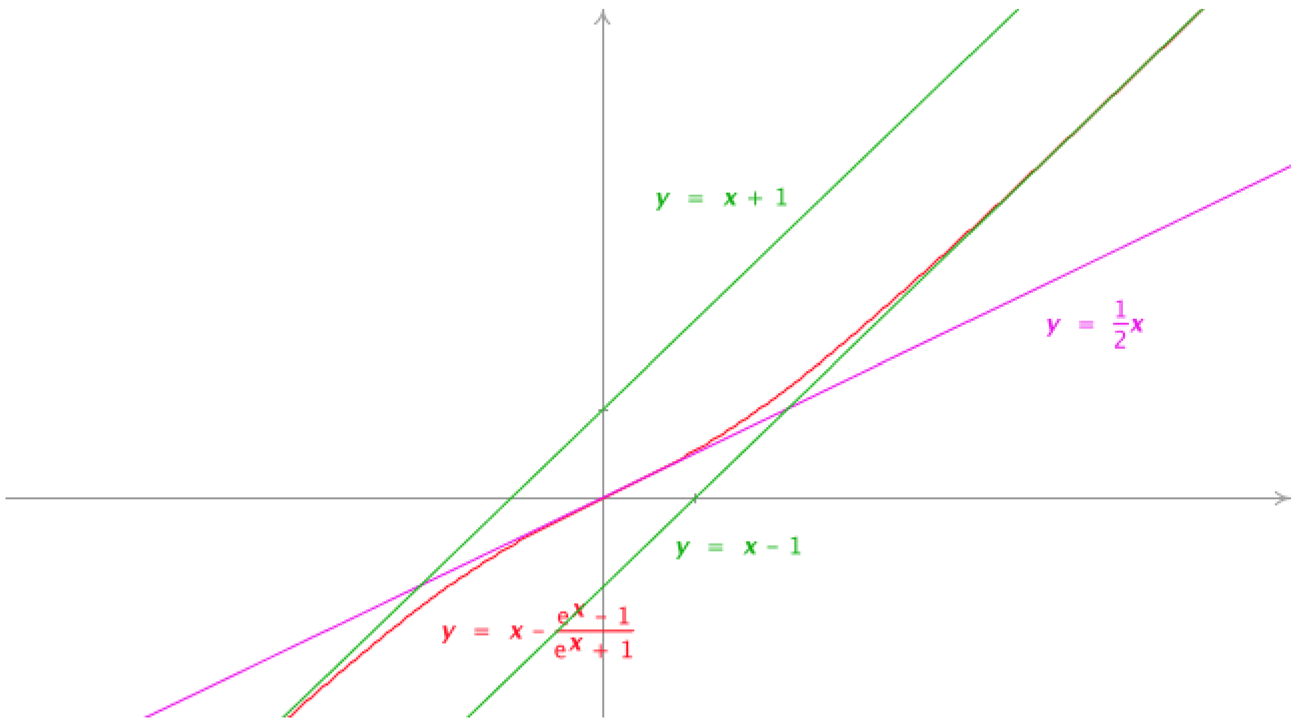
2_b Variations de *f* sur $[0\,;+\infty[$.

$$f'(x) = (x-1)' + \left(\frac{2}{e^x+1}\right)' = 1 + \frac{-2\,e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)^2 - 2\,e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2} > 0$$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ (et sur tout $\mathbb{R}$, drôle de question).
Si *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ par symétrie elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

3_ Courbe de *f*.



4_ Solution de l'équation $f(x)=1$

La fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction composée de fonctions continues.
La fonction *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et l'image de l'intervalle $]-\infty;+\infty[$ est $]-\infty;+\infty[$, 1 appartient à $]-\infty;+\infty[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

$$1{,}6<\alpha<1{,}7$$

Exercice II
5 points

Nombre de solutions de $f(x)=d$.

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+x^2-8x+4$

1_ Variations de *f*.

$f'(x)=3x^2+2x-8$

$\Delta=2^4+4\times 3\times 8=10^2$, $x_1=\dfrac{-2-10}{2\times 3}=-2$, $x_2=\dfrac{4}{3}$

D'après le signe du trinôme du second degré pour $x\in]-\infty;-2[\cup\left]\dfrac{4}{3};+\infty\right[$ $f'>0$ et pour $x\in\left]-2;\dfrac{4}{3}\right[$ $f'<0$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{4}{3}$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	M	↘	m	↗	$+\infty$

$$M=f(-2)=16 \quad \text{et} \quad m=f\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{68}{27}$$

2_Limites en $+\infty$ et $-\infty$.

$f(x)=x^3\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{8}{x^2}-\dfrac{4}{x}\right)$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3_ Soit *d* un réel, nombre de solutions de l'équation $f(x)=d$ en fonction de *d*.

On applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur les intervalles où *f* est strictement monotone.

f est continue, c'est un polynôme, et strictement croissante sur $\left]-\infty;-2\right]$ et l'image de cet intervalle est $\left]-\infty;16\right]$ donc si $d\in\left]-\infty;16\right]$ alors $f(x)=d$ admet une solution unique sur $\left]-\infty;-2\right]$ sinon $f(x)=d$ n'admet pas de solution sur $\left]-\infty;-2\right]$.

De même, *f* est continue et strictement décroissante sur $\left[-2\,;\frac{4}{3}\right]$ l'image de cet intervalle est $\left[-\frac{67}{27};16\right]$ donc si $d\in\left[-\frac{67}{27};16\right]$ alors $f(x)=d$ admet une solution unique sur $\left[-2\,;\frac{4}{3}\right]$ sinon $f(x)=d$ n'admet pas de solution sur $\left]-2\,;\frac{4}{3}\right]$.

Et de même si $d\in\left[-\frac{67}{27};+\infty\right[$ alors $f(x)=d$ admet une solution unique sur $\left[\frac{4}{3};+\infty\right[$ sinon $f(x)=d$ n'admet pas de solution sur $\left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

Donc :

pour $d>16$ l'équation $f(x)=d$ admet une seule solution,

pour $d=16$ l'équation $f(x)=d$ admet deux solutions, -2 et une autre, (il y une solution commune, -2, appatenant aux deux premiers intervalles),

pour $\frac{-68}{27}<d<16$ l'équation $f(x)=d$ admet trois solutions,

pour $d=\frac{-68}{27}$ l'équation $f(x)=d$ admet deux solutions, $\frac{4}{3}$ et une autre,(il y une solution commune appatenant aux deux derniers intervalles),

pour $d<\frac{-68}{27}$ l'équation $f(x)=d$ admet une seule solution.

Exercice III

5 points

Soit *f* une fonction continue de [0 ; 1] dans [0 ; 1].
On définit *g* sur [0 ; 1] par $g(x)=f(x)-x$
f est continue sur [0 ; 1] et l'application identique, $x\rightarrow x$, est continue sur $\mathbb{R}$ donc *g* est continue sur [0 ; 1]

Pour tout $x\in[0;1]$, $f(x)\in[0;1]$ donc $0\leqslant f(x)\leqslant 1$.
On en déduit :
$g(0)=f(0)-0=f(0)\geqslant 0$
$g(1)=f(1)-1\leqslant 1-1=0$
Donc $0\in[g(0);g(1)]$.

La fonction *g* est continue sur [0;1] et $0\in[g(0);g(1)]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x)=0$ admet une solution $c\in[0\,;1]$.

$g(c)=0 \Rightarrow f(c)-c=0 \Rightarrow f(c)=c$ L'équation $f(x)=x$ admet une solution $c\in[0;1]$.

Exercice IV
5 points

Un musée est composée de cinq salles, dont une intitulée les impressionnistes qu'on notera *I* et une autre les cubistes, notée *C*. On note les trois salles restantes *A*, *B* et *D*.

1_ On peut visiter ces cinq salles dans n'importe quel ordre donc une visite correspond à une 5-liste, ou 5-uplet, ordonnée sans répétition donc à un arrangement de 5 lettres distinctes parmi 5 ou encore à une permutation de 5 lettres (anagramme de $ABCDI$). Il y a $P_5 = A_5^5 = 5\,!$ visites possibles.

2_ La salle des impressionnistes est en quatrième position donc il reste à choisir les places (ou le rang) des 4 salles restantes. Il y a $P_4 = A_4^4 = 4\,!$ visites possibles avec la salle des impressionnistes est en quatrième position.

3_ La salle des cubistes avant celle des impressionnistes.
On commence par choisir les rangs de ces deux salles, il faut choisir deux rangs parmi cinq, on sait que *C* est avant *I* donc l'ordre dans le choix de ces deux rangs n'intervient pas. Il y a $\binom{5}{2}$ choix.
Il reste à choisir l'ordre des trois salles restantes donc il y a $P_3 = A_3^3 = 3\,!$ choix.
Il y a $P_3 \binom{5}{2}$ visites possibles où la salle des cubistes est visitée avant celle des impressionnistes.

4_ La salle des cubistes avant celle des impressionnistes mais maintenant il y a *n* salles.
En reprenant le raisonnement de la question 3, Il y a $\binom{n}{2}$ choix pour *I* et *C* puis P_{n-2} pour les autres salles donc $P_{n-2} \binom{n}{2}$ visites possibles où la salle des cubistes est visitée avant celle des impressionnistes

Exercice V
5 points

Démonstration par récurrence.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{2\,u_n + 3}{u_n + 4}$

1_ $u_1 = \dfrac{3}{4}$ et $u_2 = \dfrac{18}{19}$

2_ Pour $n > 1$, soit P_n la propriété : $u_n > 0$.
Démontrons par récurrence que P_n est vraie pour tout $n > 0$.

Initialisation.
$u_1 = \dfrac{3}{4} > 0$ donc P_1 est vraie.

Hérédité.

On suppose P_n vraie (mais surtout pas, vraie pour tout $n>1$, sinon on admet la propriété P_n et il n'y a plus rien à démontrer).
Démontrons que $u_{n+1}>0$.
On recherche le signe de u_{n+1}, on va appliquer la règle des signes, tout bêtement.
$u_n>0 \Rightarrow 2u_n+3>0$ et $u_n+4>0$ donc $u_{n+1}>0$.
$P_n \Rightarrow P_{n+1}$ la propriété est héréditaire.

Conclusion.

Pour tout $n>0$, $u_n>0$

3_ Pour $n>1$, soit Q_n la propriété : $u_n-1<0$.
Démontrons par récurrence que Q_n est vraie pour tout $n>0$.

Initialisation.

$u_1-1=\frac{3}{4}-1<0$ donc Q_1 est vraie.

Hérédité.

On suppose Q_n vraie (mais surtout pas, vraie pour tout $n>1$, sinon on admet la propriété Q_n et il n'y a plus rien à démontrer).
Démontrons que $u_{n+1}-1<0$.
On recherche le signe de $u_{n+1}-1$, on va appliquer la règle des signes, tout bêtement.

$$u_{n+1}-1=\frac{2u_n+3}{u_n+4}-\frac{u_n+4}{u_n+4}=\frac{u_n-1}{u_n+4}$$

D'après Q_n, $u_n-1<0$ et on a démontré que $u_n>0$ donc $u_n+4>0$ et $u_{n+1}-1<0$.
$Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$ la propriété est héréditaire.

Conclusion.

Pour tout $n>0$, $u_n-1<0$

4_ Soit la suite (v_n) définie par : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+3}$

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3}=\frac{\frac{2u_n+3}{u_n+4}-1}{\frac{2u_n+3}{u_n+4}+3}=\frac{2u_n+3-(u_n+4)}{2u_n+3+3(u_n+4)}=\frac{u_n-1}{5(u_n+3)}=\frac{1}{5}v_n$$

Donc la (v_n) est géométrique de raison $q=\frac{1}{5}$

$\left|\frac{1}{5}\right|<1$ donc la suite converge vers 0.