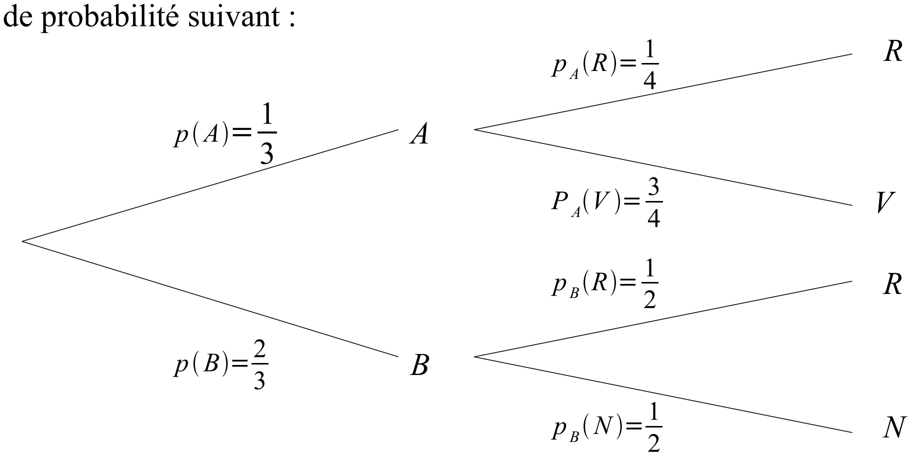
Exercice 1 **5 points**

L'urne A contient une boule rouge et trois vertes. Si on tire au hasard une boule de A, chaque boule a la même probabilité d'être tirée. La probabilité d'obtenir une rouge sachant qu'on effectue le tirage dans l'urne A est $p_A(R)=\frac{1}{4}$ et la probabilité d'obtenir une verte est $p_A(V)=\frac{3}{4}$
L'urne B contient deux boules rouges et deux noires. De même, la probabilité d'obtenir une rouge sachant qu'on effectue le tirage dans l'urne B est $p_B(R)=\frac{1}{2}$ et la probabilité d'obtenir une noire est $p_A(N)=\frac{1}{2}$

1. On dispose d'un dé à six face, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. On le lance une fois; si l'on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne A donc la probabilité de tirer une boule de l'urne A est $p(A)=\frac{1}{3}$.
Sinon on tire au hasard une boule de l'urne B donc la probabilité de tirer une boule de l'urne B est $p(B)=\frac{2}{3}$.
On obtient l'arbre de probabilité suivant :



a. D'après l'arbre, la probabilité d'obtenir une boule noire est :

$$p(N)=p_B(N)\,p(B)=\frac{1}{3}$$

b. La probabilité d'obtenir une boule rouge est :

$$p(R)=p_A(R)\,p(A)+p_B(R)\,p(B)=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$$

La probabilité d'obtenir une boule verte est :

$$p(V)=p_A(V)\,p(A)=\frac{1}{4}$$

Le rouge a la plus grande probabilité de sortir.

c. $P_R(B)=\dfrac{p(R\cap B)}{p(R)}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{12}{5}=\dfrac{4}{5}$

La probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge $\dfrac{4}{5}$

2. On réunit toutes les boules dans une urne donc elle contient 3 rouges, 3 vertes et 2 noires. On tire successivement trois boules de l'urne que l'on pose chaque fois devant l'urne donc l'ordre compte et il n'y a pas de répétition, une issue est un arrangement de 3 parmi 8. Il y a A_8^3 isssues possibles.
La loi est équirépartie donc on applique la formule :

$$p(E)=\frac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre de cas possibles}}$$

a. Soit l'évènement, E_3, "la 3ème boule tirée est noire", il y a deux cas, la noire numéro 1 ou la numéro 2, puis il faut choisir les deux premières parmi les 7 restantes, il y a A_7^2 arrangements. Donc $2\,A_7^2$ cas favorables.

La probabilité est :

$$p=\frac{2\,A_7^2}{A_8^3}=\frac{2\times 7\,!}{5\,!}\,\frac{5\,!}{8\,!}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

On peut aussi construire un arbre en considérant les évènements N_i une boule noire apparaît au i^{eme} tirage et son contraire $\overline{N_i}$.

b. On peut facilement vérifier par le calcul que l'évènement, E_1, "la 1ere boule tirée est noire" a la même probabilité que l'évènement, E_3, "la 3ème boule tirée est noire". Il y a 2 noires parmi 8 donc la probabilité est $p(E_1)=\dfrac{1}{4}$.

On va justifier cette affirmation dans le cas général en montrant qu'il y a autant des cas favorables pour les deux évènements.

On peut calculer avec les arrangements, 2 choix pour la noire puis 2 parmi 7 donc A_7^2 choix.

Mais on peut aussi faire correspondre à chaque issue $(n_i,\ x,\ y)$ de E_1 l'issue $(x,\ y,\ n_i)$ de E_3 (tiens ! Une bijection !) et conclure que les probabilités sont égales.

Exercice 2 **5 points**

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(0\ ,\ \vec{u}\ ,\ \vec{v})$; unité graphique 2 cm.

On appelle *A* et *B* les points du plan d'affixe respective $a=1$ et $b=-1$. On considère l'application *f* qui à tout point *M*, différent du point *B*, d'affixe *z*, fait correspondre le point *M'* d'affixe *z'* définie par :

$$z'=\frac{z-1}{z+1}$$

1. $z'=z$ donc $\frac{z-1}{z+1}=z$

$z-1=z(z+1)\ \Rightarrow\ -1=z^2\ \Rightarrow\ z=i$ ou $z=-i$

Les points invariants de *f* sont les points d'affixe *i* et *-i*.

2. **a.** Soit *z* un nombre complexe différent de -1.

$$(z'-1)(z+1)=\left(\frac{z-1}{z+1}-1\right)(z+1)=\left(\frac{z-1-(z+1)}{z+1}\right)(z+1)=-2$$

b. D'après la relation trouvée en a.

$|z'-1||z+1|=2$

$arg((z'-1)(z+1))=arg(z'-1)+arg(z+1)=\pi+2k\pi \qquad (arg(-2)=\pi+2k\pi)$

$\overrightarrow{BM}$ a pour affixe $z+1$ et $\overrightarrow{AM'}$ a pour affixe $z'-1$ donc :

$AM'\times BM=2$ et $(\vec{u},\overrightarrow{AM'})+(\vec{u},\overrightarrow{BM})=\pi+2k\pi$ les angles sont supplémentaires.

3. *M* appartient au cercle (C) de centre *B* et de rayon 2 donc $BM=2$

$AM'\times BM=2$ donc $AM'=1$ et *M'* appartient au cercle (C') de centre *A* et de rayon 1.

4. Soit le point *P* d'affixe $p=-2\ +i\sqrt{3}.$

a. $p+1=-1+i\sqrt{3}$

$|p+1|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

Soit θ l'argument de (*p*+1)

$$\begin{cases}\cos\theta=-\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\qquad \cos\theta=-\frac{1}{2}\ \text{ donc }\ \theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ \text{ ou }\ \theta=\frac{-2\pi}{3}+2k\pi$$

$\sin\theta>0$ donc $\theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ et $p+1=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

b. $BP=|p+1|=2$ donc le point *P* appartient au cercle (C).

c. *Q* est le point d'affixe $q=-\overline{p}$

$\overrightarrow{AQ}$ a pour affixe $-\overline{p}-1=-\overline{(p+1)}$

$\overrightarrow{AP'}$ a pour affixe $p'-1$ et d'après le résultat du 2a $(p'-1)(p+1)=-2$ donc $p'-1=-\dfrac{2}{p+1}$

$$(\overrightarrow{AP'},\overrightarrow{AQ})=arg\left(-\overline{(p+1)}\left(-\frac{p+1}{2}\right)\right)=arg\left(\frac{|p+1|^2}{2}\right)=2k\pi$$

Les points *A*, *P'*= *f*(*P*) et *Q* sont alignés.

Si vous préférez calculer.

$f(P)=P'$ a pour affixe :

$$p'=\frac{p-1}{p+1}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{(-3+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{4}=\frac{3+3+3i\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{4}=\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$$

$\overrightarrow{AP'}$ a pour affixe $p'-1=\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}-1=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$

Q est le point d'affixe $q=-\overline{p}=2+i\sqrt{3}$

$\overrightarrow{AQ}$ a pour affixe $q-1=1+i\sqrt{3}$

$$(\overrightarrow{AP'},\overrightarrow{AQ})=arg\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}\right)=arg(2)=2k\pi$$

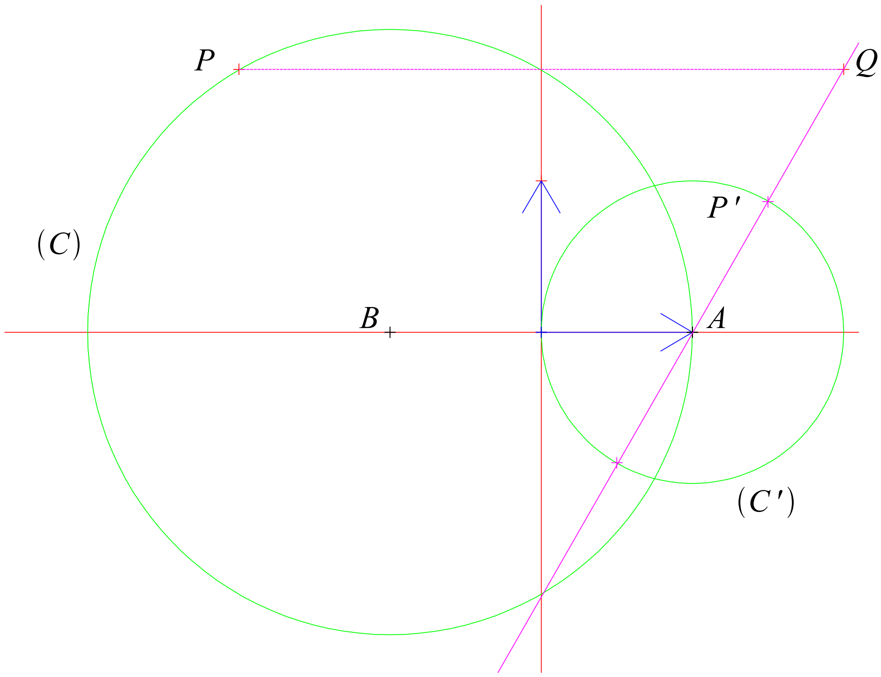
Les points *A*, *P'*= *f*(*P*) et *Q* sont alignés.

d. D'après la question 3, *P* appartient au cercle (C) donc *P'* appartient au cercle (C').

Q a pour affixe $q=-\overline{p}$ donc *Q* est le symétrique de *P* par rapport à l'axe des imaginaires purs, $(O,\vec{u})$.

A, *P'* et *Q* sont alignés donc *P'* est l'un des points d'intersection de la droite (*AQ*) avec le cercle (C').

$(\vec{u},\overrightarrow{AP'})+(\vec{u},\overrightarrow{BP})=\pi+2k\pi$ les angles sont supplémentaires donc le point *P'* est le point qui appartient au premier quartier.



Exercice 3 **Réservé au candidats n'ayant pas suivi la spécialité mathématique.** **5 points**

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0=1,\ b_0=7$ et $\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{3}(2\ a_n+b_n) \\ b_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+2\ b_n) \end{cases}$

Soit D une droite munie du repère $(0\ ;\vec{i})$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisse respective a_n et b_n.

1. $a_1=3,\ b_1=5,\ a_2=\frac{11}{3},\ b_2=\frac{13}{3}$

2. (u_n) est la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n=b_n-a_n$.

$u_{n+1}=b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+2b_n-2\ a_n-b_n)=\frac{1}{3}(b_n-a_n)=\frac{1}{3}u_n$

$u_0=6$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0=6$.

Pour tout $n\in\mathbb{N},\ u_n=6\left(\frac{1}{3}\right)^n=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{2}{3^{n-1}}$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} > 0$ donc $b_n - a_n > 0$ et $a_n < b_n$.

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) - a_n = \frac{1}{3}(-a_n + b_n)$

$a_n < b_n$ donc $\frac{1}{3}(-a_n + b_n) > 0$ et $a_{n+1} - a_n > 0$

(a_n) est une suite strictement croissante.

$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) - b_n = \frac{1}{3}(a_n - b_n)$

$a_n < b_n$ donc $\frac{1}{3}(a_n - b_n) < 0$ et $b_{n+1} - b_n < 0$

(b_n) est une suite strictement décroissante.

Géométriquement les intervalles $[A_n B_n]$ sont emboîtés, $[A_{n+1} B_{n+1}] \subset [A_n B_n]$.

4. D'après les résultats précédents, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$, (a_n) est strictement croissante et (b_n) strictement décroissante donc il suffit de démontrer que $(a_n - b_n)$ converge vers 0.

$(u_n) = (a_n - b_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et converge donc vers 0.

Les suites (a_n) et b_n sont adjacentes.

5. (v_n) est la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = b_n + a_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n + a_n + b_n) = a_n + b_n = v_n$

Donc la suite (v_n) est constante et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 = 8$.

Le milieu du segment $[A_n B_n]$ a pour abscisse $\frac{a_n + b_n}{2} = \frac{v_n}{2} = 4$.

Donc les segments $[A_n B_n]$ ont le même milieu *I* d'abscisse 4.

6. Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes donc sont convergentes vers une même limite *l*.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{2}(v_n - u_n) = \frac{1}{2}(4 - v_n)$

$\lim v_n = 0$ donc $\lim a_n = 4 = l$.

Les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes vers une même limite égale à 4.

Les points A_n et B_n tendent vers le point I quand *n* tend vers $+\infty$ ou les segments $[A_n B_n]$ tendent vers le singleton $\{I\}$.

Exercice 3 Réservé au candidats ayant suivi la spécialité mathématique. 5 points

1. On va démontrer la relation R_k, $(x-1)(1+x+x^2+x^3+...+x^{k-1})=x^k-1$, par récurrence

Initialisation.
$(x-1)(1)=x-1$ donc R_1 est vraie.

Hérédité.
On suppose R_k vraie.
$(x-1)(1+x+x^2+x^3+...+x^{k-1}+x^k)=(x-1)(1+x+x^2+x^3+...+x^{k-1})+(x-1)x^k$
En appliquant R_k
$(x-1)(1+x+x^2+x^3+...+x^{k-1}+x^k)=x^k-1+x^{k+1}-x^k$
$(x-1)(1+x+x^2+x^3+...+x^{k-1}+x^k)=x^{k+1}-1$
R_{k+1} est vérifiée et la propriété est héréditaire.

Conclusion.
Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, R_k est vraie.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier *a* supérieur ou égal à 2.

2. **a.** *n* est un entier naturel non nul et *d* un diviseur positif de *n* : $n=dk.$

$$a^n-1=a^{dk}-1$$
$$=(a^d)^k-1$$

En appliquant R_k $\left(x=a^d \text{ et } (a^d)^l=a^{ld}\right)$
$a^n-1=(a^d-1)(1+a^d+a^{2d}+a^{3d}+...+a^{(k-1)d})$
$a^n-1=q(a^d-1)$

a^d-1 est un diviseur de a^n-1.

b. En appliquant le résultat du 2a.

3 est un diviseur de 2004 donc $2^{2004}-1$ est divisible par $2^3-1=7$

6 est un diviseur de 2004 donc $2^{2004}-1$ est divisible par $2^6-1=63$

9 est un diviseur de 63 et 63 un diviseur de $2^{2004}-1$ donc 9 divise $2^{2004}-1$

3. m et n sont deux entiers naturels non nuls et d leur pgcd.

a. m' et n' sont définis par $m=dm'$ et $n=dn'$, d est le pgcd de m et n donc m' et n' sont premiers entre eux.

D'après le théorème de Bézout :

il existe deux entiers relatifs s et t tels que $m's+n't=1$.

En posant $u = s$ et $v = -t$ on obtient $m'u-n'v=1$.

Puis en multipliant par d :

$$mu-nv=d.$$

b. u et v sont strictement positifs donc a^{mu} et a^{nv} sont des entiers.

$mu-nv=d$ donc $mu=nv+d$

$$\begin{aligned}(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d &= a^{mu}-1-(a^{nv+d}-a^d)\\ &= a^{mu}-1-a^{mu}+a^d\end{aligned}$$

$$(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d=a^d-1.$$

Pour démontrer que a^d-1 est le pgcd de $a^{mu}-1$ et $a^{nv}-1$ on raisonne en deux temps puis on conclut.

i_ On démontre que le pgcd de $a^{mu}-1$ et $a^{nv}-1$ divise a^d-1

Soit e le pgcd de $a^{mu}-1$ et $a^{nv}-1$

$a^{mu}-1=qe$ et $a^{nv}-1=q'e$

$(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d=a^d-1$ donc $qe-q'ea^d=a^d-1$ et $(q-q'a^d)e=a^d-1$

e divise a^d-1

ii_ On démontre que a^d-1 divise $a^{mu}-1$ et $a^{nv}-1$

d est le pgcd de m et u donc d'après le résultat du 2a :

a^d-1 divise $a^{mu}-1$ et $a^{nv}-1$ donc a^d-1 divise e

e divise a^d-1 et a^d-1 divise e donc $e=a^d-1$

a^d-1 est le pgcd de $a^{mu}-1$ et $a^{nv}-1$.

c. Le pgcd de m = 63 et n = 60 est d = 3.

En choisissant u = 1 et v = 1 on obtient la relation 63u - 60v = 3.

$mu=63$ et $mv=60$ donc :

$$2^3-1=7 \text{ est le pgcd de } 2^{63}-1 \text{ et } 2^{60}-1.$$

Exercice 4 **5 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1},$$

(Γ) est sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Limites aux bornes de D_f.

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 2 \text{ et } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

2. Symétrie.

$$f(x) + f(-x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} - x + \ln 4 + \frac{2}{e^{-x} + 1}$$

$$= 2\ln(4) + \frac{2}{e^x + 1} + \frac{2e^x}{e^x + 1}$$

$$= 2\ln(4) + \frac{2(e^x + 1)}{e^x + 1}$$

$$f(x) + f(-x) = 2\ln(4) + 2$$

Le point $M(a, b)$ est un centre de symétrie de la courbe de f si et seulement si pour tout $x \in D_f$, $2a - x \in D_f$ et $2b - f(2a - x) = f(x)$ ou encore $f(x) + f(2a - x) = 2b$

Voir le cours, plan d'étude d'une fonction.

Le point $A(0 \; ; \; 1 + \ln 4)$ est le centre de symétrie de Γ.

On peut étudier la fonction sur $\mathbb{R}^+$ puis en déduire les propriétés de f sur $\mathbb{R}^-$ par symétrie.

3. Variations de la fonction f.

$$f'(x) = 1 - 2\frac{u'(x)}{u^2(x)}$$

$$= 1 - 2\frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$$

Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $e^u > 0$ donc $f' > 0$ et *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variations.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$ $1+\ln 4$ $\nearrow$	$+\infty$

4. **a.** La fonction *f* est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. L'ensemble image de *f* est $\mathbb{R}$ d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection) pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x)=m$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$.

b. $f(1{,}1) \simeq 2{,}99 < 3$ et $f(1{,}2) \simeq 3{,}05 > 3$ donc la solution *a* de $f(x)=3$ vérifie : $1{,}1 < a < 1{,}2$

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)+f(-x)=2+2\ln 4$ donc :

$f(a)+f(-a)=2+\ln 4$

$3+f(-a)=2+2\ln 4$

$f(-a)=2\ln 4-1$

$-a$ est-il la solution de l'équation $f(x)=2\ln 4-1$

5. **a.** Changement d'écriture

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}\\
&= x+\ln 4+\frac{2+2e^x-2e^x}{e^x+1}\\
f(x) &= x+\ln 4+2-\frac{2e^x}{e^x+1}
\end{aligned}
$$

b. (Δ) est la droite d'équation $y=x+\ln 4$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x\ln 4=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+1}=0$$

La droite (Δ) est une asymptote de la courbe (Γ) en $+\infty$.

Par symétrie par rapport à $A(0\ ;\ 1+\ln 4)$ on peut conclure que la droite δ symétrique de (Δ) est une asymptote de la courbe (Γ) en $-\infty$.

δ est symétrique de (Δ) donc δ est parallèle à (Δ), son équation est $y=x+b$

$M(0\ ;\ \ln 4)\in\Delta$

$\overrightarrow{AM}'=\overrightarrow{MA}(0;1)$ donc $\overrightarrow{OM}'=\overrightarrow{OA}(0;1+\ln 4)+\overrightarrow{MA}(0;1)$

Donc $M'(0;2+\ln 4)\in\delta$ et la droite $\delta=(\Delta')$ d'équation $y=x+2+\ln 4$ est une asymptotes de la courbe (Γ) en $-\infty$.

On peut aussi calculer la limite.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x+2+\ln 4=\lim\limits_{x\to-\infty} -2\dfrac{e^x}{e^x+1}=0$

La droite (Δ') d'équation $y=x+2+\ln 4$ est asymptotes de la courbe (Γ) en $-\infty$

$f(x)-x\ln 4=\dfrac{2}{e^x+1}>0$ donc la courbe (Γ) est au dessus de la droite (Δ).

Par symétrie la courbe (Γ) est en dessous de la droite (Δ').

Voici la représentation graphique pour illustrer et vérifier les résultats.