Corrigé du devoir maison n°2.

Soit *f* la fonction définie sur [0;1] et dérivable sur]0;1] : $x \to x-2\sqrt{x}+1$
On appelle Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1 a. On veut démontrer l'équivalence entre $M \in \Gamma$ *et* $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$.

Pour démontrer que A et B sont équivalents on démontre que A implique B (condition nécessaire) puis que B implique A (condition suffisante).

Condition nécessaire.

La courbe Γ a pour équation $y=x-2\sqrt{x}+1$

$$\mathbf{x \geqslant 0} \Rightarrow x=\left(\sqrt{x}\right)^2 \text{ et } y=\left(\sqrt{x}-1\right)^2$$

On en déduit que **y est positif** donc :

$$y=\left(\sqrt{y}\right)^2 \text{ et } \left(\sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{x}-1\right)^2$$

Attention à ce passage car $a^2=b^2 \Rightarrow a=b$ ou $a=-b$ (Rappel $a^2-b^2=0 \Rightarrow (a-b)(a+b)=0$)

$$\boldsymbol{\sqrt{y}\geqslant 0} \Rightarrow \sqrt{y}=\left|\sqrt{x}-1\right| \quad (1)$$

La fonction ***f* est définie sur [0;1]** donc $\sqrt{x}\leqslant 1$ et $\left|\sqrt{x}-1\right|=1-\sqrt{x}$ (2)

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \sqrt{y}=1-\sqrt{x}$$

On en conclut que $M(x\,;y)\in\Gamma \Rightarrow x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$ et $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

Condition suffisante.

Soit un point $M(x\,;y)$ tel que $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$ et $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$
$\sqrt{y}\geqslant 0$ et $\sqrt{x}=1-\sqrt{y}$ donc $\sqrt{x}\leqslant 1$ et $x\leqslant 1$
On en conclut que $x\in[0\,;1]=D_f$

$$\sqrt{y}=1-\sqrt{x} \Rightarrow \left(\sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{1}-\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow y=x-2\sqrt{x}+1$$

On en conclut que $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$ et $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \Rightarrow M(x\,;y)\in\Gamma$ et qu'il y a bien équivalence.

1 b. Symétrie de Γ *par rapport à la droite d d'équation* $y=x$.

Caractérisation de la symétrie (réflexion) par rapport à *d*.
La droite *d* a pour vecteur directeur $\vec{u}(1\,;1)$.
$M(x,y)$ et $M'(x',y')$ sont symétriques par rapport à *d* signifie que :
le milieu de $[MM']$ appartient à *d* donc $\dfrac{x+x'}{2}=\dfrac{y+y'}{2}$ (1)
(MM') est perpendiculaire à *d* donc $\overrightarrow{MM'}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow (x'-x)+(y'-y)=0.$ (2)

Résolvons le système d'inconnues x' et y'.

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}\left|\begin{array}{l} x+x'=y+y' \\ (x'-x)+(y'-y)=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x'-y'=y-x \\ x'+y'=x+y \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} (L_1+L_2) \\ (L_2-L_1) \end{array}\left|\begin{array}{l} 2\,x'=2\,y \\ 2\,y'=2\,x \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x'=y \\ y'=x \end{array}\right.$$

Donc le symétrique de $M(x,y)$ est $M'(y,x)$.

D'après l'équivalence démontrée à la question *1 a.*

$M(x,y)\in\Gamma \Leftrightarrow x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$ et $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \Leftrightarrow y\geqslant 0,\ x\geqslant 0$ et $\sqrt{y}+\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow M'\in\Gamma$.

Donc la courbe est symétrique par rapport à *d*.

2 a. Si Γ était un arc de cercle.

La fonction *f* est dérivable en 1 et son nombre dérivé est 0, $f(1)=0$, donc la tangente à Γ au point $T(1;0)$ est l'axe des abscisses. Si Γ est un arc de cercle son centre est sur la perpendiculaire à la tangente donc sur la droite d_1 d'équation $x=1$. Par symétrie, par rapport à d, le centre est aussi sur la droite d_2 d'équation $y=1$. Donc le centre serait $I(1;1)$ et son rayon $IT=1$.

2 b. Γ n'est pas un arc de cercle.

Soit $A(x;y)$ le point d'intersection de Γ et *d*.

$$\left.\begin{array}{r} A\in d \Rightarrow x=y \\ A\in\Gamma \Rightarrow x\geqslant 0,\ y\geqslant 0 \text{ et } \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x\geqslant 0 \text{ et } 2\sqrt{x}=1 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

Donc *A* a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.

$AI^2=2\left(1-\frac{1}{4}\right)^2=2\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{8}>1$ *AI* n'est pas égale à *IT* donc Γ n'est pas un arc de cercle.

Pour éclairer les lanternes.

Une équation du cercle de centre *I* et de rayon 1 est $IM^2 = 1$.

Donc : $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

Si $x\in[0;1]$ et $y\in[0;1]$, une équation de l'arc de cercle est $1-y=\sqrt{1-(x-1)^2}$ (Attention, $y-1\leqslant 0$) ou encore $y=1-\sqrt{2\,x-x^2}$

La courbe Γ est en dessous du quart de cercle comme le prouve la relation $AI>1$.