Limites remarquables de sinus et cosinus.

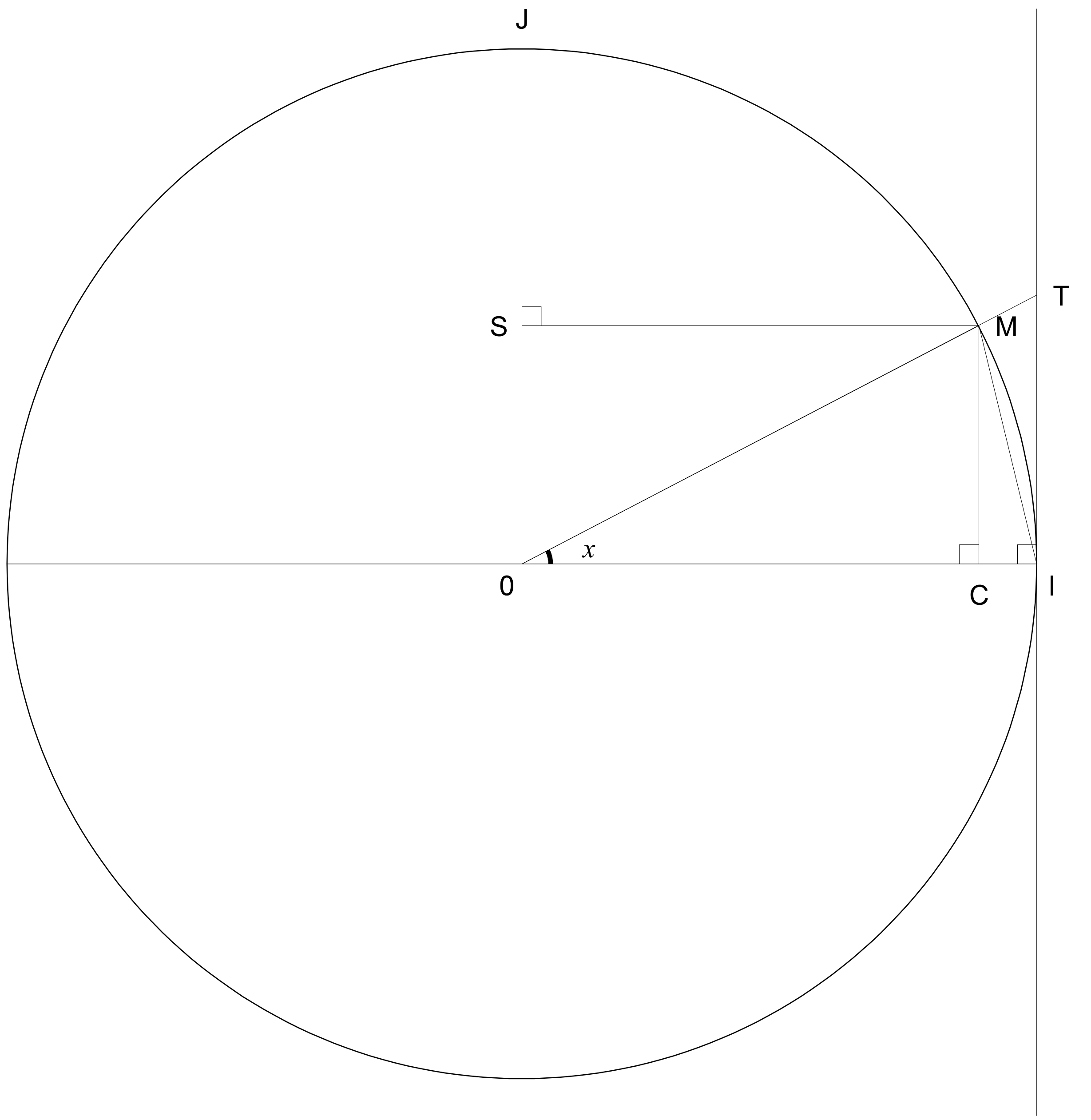
Partie A. *Calcul d'aire.*

1 M un point du cercle trigonométrique Γ tel que la mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$ soit égale à x donc l'abscisse du point C est $\cos x$.

x est un réel de l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos x > 0$ et $OC = \cos x.$

De même $MC = OS = \sin x.$

OI rayon du cercle trigonométrique vaut 1 donc $\tan x = \dfrac{TI}{OI} = IT.$



2 Aire de *MOI*.

$$A_{MOI}=\frac{1}{2}OI\ CM=\frac{\sin x}{2}$$

Aire de *TOI*.

$$A_{TOI}=\frac{1}{2}OI\ TI=\frac{\tan x}{2}$$

3 L'aire d'un secteur circulaire est proportionnelle à son angle géométrique. L'aire du disque trigonométrique mesure π. Comme $x>0$, l'aire du secteur circulaire *MOI* est :

$$A_{\text{circ}}=\pi\frac{x}{2\pi}=\frac{x}{2}$$

4 La tangente (*TI*) est extérieure au disque, le segment [*MI*] est inclus dans le disque donc le triangle *MOI* est inclus dans le secteur circulaire *MOI* qui est inclus dans le triangle *TOI*.

$$A_{MOI}<A_{\text{circ}}<A_{TOI}$$

D'après les questions précédentes pour tout $x\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$:

$$\frac{\sin x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\tan x}{2}\quad\text{et}\quad\sin x<x<\tan x$$

Partie B. *Deux limites remarquables.*

1 D'après A, pour tout $x\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x<x<\tan x$ donc

$$\sin x<x<\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$x\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[\ \text{donc}\quad x>0,\ \sin x>0\ \text{ et }\cos x>0$$

$$\sin x<x\ \Rightarrow\ \frac{\sin x}{x}<1$$

$$x<\frac{\sin x}{\cos x}\ \Rightarrow\ \cos x<\frac{\sin x}{x}$$

d'où :

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

2 La fonction cosinus est continues sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\lim_{x\to0,\ x>0}\cos x=\cos 0=1$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to0,\ x>0}\cos x\leqslant\lim_{x\to0,\ x>0}\frac{\sin x}{x}\leqslant\lim_{x\to0,\ x>0}1$$

$$1\leqslant\lim_{x\to0,\ x>0}\frac{\sin x}{x}\leqslant1\quad\text{et}\quad\lim_{x\to0,\ x>0}\frac{\sin x}{x}=1$$

3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f \; : \; x \; \rightarrow \; \dfrac{\sin x}{x}$

$$x \in \mathbb{R}^* \; \Rightarrow \; -x \in \mathbb{R}^* \text{ et } f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$$

La fonction f est paire.

On pose $y = -x$. Diaprés le résultat de la question précédente :

$$\lim_{x \to 0,\; x < 0} f(x) \; = \; \lim_{y \to 0,\; y > 0} f(-y) \; = \; \lim_{y \to 0,\; y > 0} f(y) \; = \; 1$$

$$\lim_{x \to 0,\; x > 0} \frac{\sin x}{x} \; = \; 1 \; = \; \lim_{x \to 0,\; x < 0} \frac{\sin x}{x} \; \Rightarrow \; \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \; = \; 1$$

4 $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} \; ; \; 0\right[\cup \left]0 \; ; \; \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc x, $\cos x$, $\cos x + 1$, $\cos x - 1$ et $\sin x$ sont non nuls.

$$\frac{1}{1+\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1-\cos x}{x^2}$$

5 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \; = \; 1 \; \Rightarrow \; \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \; = \; 1$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0} \cos x \; = \; 1 \; \Rightarrow \; \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+\cos x} \; = \; \frac{1}{2}$

donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \; = \; \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \; = \; \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} \; = \; \lim_{x \to 0} \left(x \frac{1-\cos x}{x^2}\right) = \lim_{x \to 0} x \; \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \; = \; 0$$

6 Le nombre dérivé de sinus en 0, s'il existe, est $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sin h - \sin 0}{h}$

D'après les résultats précédents :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h - \sin 0}{h} \; = \; \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \; = \; 1 \; = \; \sin'(0)$$

Le nombre dérivé de sinus en 0 est 1.

De même : $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - \cos 0}{h} \; = -\lim_{h \to 0} \frac{1-\cos h}{h} \; = \; 0$

Le nombre dérivé de cosinus en 0 est 0.