Corrigé du devoir maison n°5

Partie A_ Etude préliminaire d'une fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=(2-x)e^x-1$

1_ Limites en $+\infty$ et $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2\,e^x-\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x-\lim\limits_{x\to-\infty} 1=-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2-x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)e^x=-\infty$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=-\infty}$

2_ Variation de φ

Les fonctions polynômes et exponentielles sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc φ comme somme et produit de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\varphi'(x)=-e^x+(2-x)e^x=e^x(1-x)$$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc la fonction dérivée a le même signe que $(1-x)$.

Pour $x\in]-\infty\ ;1[$, $\varphi'(x)>0$. et φ est strictement croissante.
Pour $x\in]1\ ;+\infty[$, $\varphi'(x)<0$. et φ est strictement décroissante.

Remarque. $\varphi(1)$ est le maximum absolue de la fonction.

$\varphi(-2)=4\,e^{-2}-1\ \simeq-0,46$
$\varphi(0)=1$
$\varphi(1)=e-1\ \simeq1,72$
$\varphi(2)=-1$

3_ Racines de φ

On applique le théorème des valeurs intermédiaires sur deux intervalles formant une partition de $\mathbb{R}$ ainsi on démontre que φ a exactement deux racines.

La fonction φ est continue et strictement croissante sur $I=]-\infty\ ;1[$ et l'image de *I* par φ est $]-1\ ;e-1[$. $e-1>0$ donc 0 appartient à $]-1\ ;e-1[$ et admet un antécédent unique α sur *I*.

La fonction φ est continue et strictement décroissante sur $J=[1\ ;+\infty[$ et l'image de *J* par φ est $[e-1\ ;-\infty[$. $e-1>0$ donc 0 appartient à $[e-1\ ;-\infty[$ et admet un antécédent unique β sur *J*.

La fonction φ s'annule exactement deux fois sur $\mathbb{R}$, en α et β, $\alpha<\beta$.

La fonction φ est strictement croissante sur I et s'annule en $\alpha \in I$, puis strictement décroissante sur J et s'annule en $\beta \in J$, donc elle est strictement positive sur $]\alpha\ ;\ \beta[$ et strictement négative sur $]-\infty\ ;\ \alpha[\cup]\beta\ ;\ +\infty[$

Signe de φ

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
φ		$-$	0	$+$	0	$-$	

4_ D'après la calculatrice :

$\varphi(-1{,}14)<0$ et $\varphi(-1{,}15)>0$ donc $-1{,}15<\alpha<-1{,}14$.

$\varphi(1{,}84)>0$ et $\varphi(1{,}85)<0$ donc $1{,}84<\beta<1{,}85$.

5_ $\varphi(\alpha)=0$ donc $(2-\alpha)e^{\alpha}=1$. $\alpha\neq 2$ donc $\boxed{e^{\alpha}=\frac{1}{2-\alpha}}$

Partie B_ Etude d'une fonction *f* définie par $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$ et calcul intégral

1_ Ensemble de définition.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=e^x-x$
h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x)=e^x-1$. $e^x-1=0$ si et seulement si $x=0$.
La fonction exponentielle est croissante donc h' est croissante donc h' est négative pour $x\leqslant 0$ et positive pour $x\geqslant 0$. Par conséquent $h(0)=1$ est le minimum absolu de h et la fonction h est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

En conclusion, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2_ Limites en $+\infty$ et $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x-1=-1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x-x=+\infty$

D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0}$

Si on étudie la limites en $+\infty$ on obtient une forme indéterminée donc on factorise par le terme dominant à l'infini e^x.

$$f(x) = \frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)} = \frac{1-\frac{1}{e^x}}{1-\frac{x}{e^x}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{e^x}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{x}{e^x}=1$

d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1}$

3_ Variations de f

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=\frac{-x\,e^x+2\;e^x-1}{(e^x-x)^2}=\frac{\varphi(x)}{(e^x-x)^2}$$

$(e^x-x)^2>0$ donc f' a le même signe que φ.

D'après les résultats de la partie A, le tableau de variations de *f* est :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	1

4_ Calcul de $f(\alpha)$

D'après le résultat de la question A_5 : $e^\alpha=\frac{1}{2-\alpha}$

$$\boxed{f(\alpha) = \frac{\frac{1}{2-\alpha}-1}{\frac{1}{2-\alpha}-\alpha}=\frac{1-2+\alpha}{1-\alpha(2-\alpha)}=\frac{\alpha-1}{(\alpha-1)^2}=\frac{1}{\alpha-1}}$$

5_ Calcul d'une intégrale

Soit *u* définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=e^x-x$, $u'(x)=e^x-1$ et $f=\frac{u'}{u}$ donc $F=\ln|u|$.
D'après le résultat de la question B_1, *u* est strictement positif sur $\mathbb{R}$ donc une primitive de *f* est $F=\ln u$.

$$\boxed{\int_0^1 f(x)dx=\left[\ln(e^x-x)\right]_0^1=\ln(e-1)\simeq 0{,}54\ .}$$

Partie C_ Etude de deux suites.

1 $g(x) = \ln\left(\frac{1}{2-x}\right)$ existe si $\frac{1}{2-x}>0$ donc sur l'intervalle $K=]-\infty ; 2[$ et $D_g=K$

La fonction affine *l*, définie par $l(x)=2-x$, est strictement décroissante et strictement positive sur D_g donc la fonction $\frac{1}{l}$ est strictement croissante sur D_g. Le logarithme népérien est strictement croissant sur son ensemble de définition donc $g=\ln\left(\frac{1}{l}\right)$ est strictement croissante sur D_g

La fonction *g* est strictement croissante et continue sur $I=[-2\ ;\ 0]$ donc l'image de *I* est l'intervalle $g(I)=[g(-2)\ ;\ g(0)]=[-\ln 4\ ;\ -\ln 2\ ]$
$-2<-\ln 4<-\ln 2<0$ donc $\boxed{g(I)\subset I.}$

2_a La suite (u_n) est définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1}=g(u_n) \end{cases}$$

Soit la propriété P_n : $u_n\in I \text{ et } u_{n+1}>u_n$

Initialisation.
$-2=u_0<u_1=g(-2)=-\ln 4<0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité.
On suppose P_n vraie.
$u_n\in I$ et $g(I)\subset I$ donc $u_{n+1}=g(u_n)\in I.$
$u_{n+1}>u_n$ et *g* est croissante sur *I* donc $g(u_{n+1})=u_{n+2}>g(u_n)=u_{n+1}$
P_{n+1} est vraie.

Conclusion.
Pour tout $n\in\mathbb{N}, P_n$ est vraie.

La suite (u_n) a tous ses termes dans I et est strictement croissante.

2_b La suite (v_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$$

$v_1 = g(v_0) = -\ln 2$ donc $-2 \leqslant u_1 = -\ln 4 \leqslant v_1 = -\ln 2 \leqslant 0$

Soit la propriété Q_n : $-2 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_{n-1} \leqslant 0$

Initialisation.
$-2 \leqslant u_1 \leqslant v_1 \leqslant 0 = v_0$ donc Q_0 est vraie.

Hérédité.
On suppose Q_n vraie.
$-2 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_{n-1} \leqslant 0$ donc u_n, v_n et v_{n-1} appartiennent à I.
g est croissante sur I et $g(I) \subset I$ donc $-2 \leqslant g(u_n) = u_{n+1} \leqslant g(v_n) = v_{n+1} \leqslant g(v_{n-1}) = v(n) \leqslant 0$
Q_{n+1} est vraie.

Conclusion.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n est vraie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-2 \leqslant v_n \leqslant v_{n-1} \leqslant 0$ *donc la suite* (v_n) *a tous ses termes dans I et est décroissante.*

3_a La fonction m est définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $m(x) = x - \ln(1+x)$
Pour tout $x \in D_m$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} > 0$ donc m est strictement croissante.
$m(0) = 0$ et m est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc pour tout $x \geqslant 0$, $m(x) \geqslant 0$ et $\ln(1+x) \geqslant x$.

3_b

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left(\frac{1}{2-v_n}\right) - \ln\left(\frac{1}{2-u_n}\right) = \ln\left(\frac{2-u_n}{2-v_n}\right) = \ln\left(\frac{2-v_n+v_n-u_n}{2-v_n}\right) = \ln\left(1+\frac{v_n-u_n}{2-v_n}\right)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant 0$ donc $\dfrac{v_n-u_n}{2-v_n} \geqslant 0$ et d'après le résultat de la question précédente :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left(1+\frac{v_n-u_n}{2-v_n}\right) \leqslant \frac{v_n-u_n}{2-v_n}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [-2 ; 0]$ donc $-2 \leqslant v_n \leqslant 0$
$-2 \leqslant v_n \leqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant -v_n \leqslant 2 \Rightarrow 2 \leqslant 2 - v_n \leqslant 4 \Rightarrow \dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{2-v_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$

$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{v_n-u_n}{2-v_n}$ et $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{2-v_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)}$

Soit la propriété R_n : $v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$

Initialisation.
$v_0 - u_0 \leqslant (v_0 - u_0)$ donc R_0 est vraie.

Hérédité.
On suppose R_n vraie.
$v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n)$ donc $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n) \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}(v_0 - u_0)$
P_{n+1} est vraie.

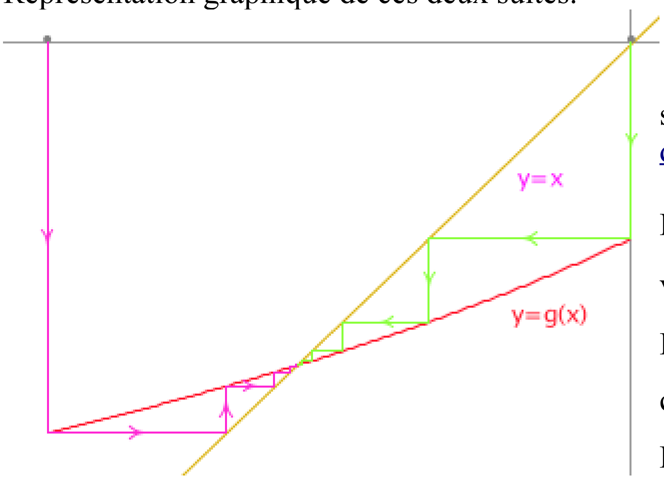
Conclusion. *Pour tout* $\boxed{n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)}$

La suite (w_n) définie par $w_n = \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ donc converge vers 0. $v_n \geqslant u_n$ donc pour tout $\boxed{n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)}$ et d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$.

La suite (u_n) *est croissante et la suite* (v_n) *est décroissante, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$ *donc ces deux suite sont adjacentes et convergent vers une limite commune* l.

4_ D'après le tableur de Open Office, libre, gratuit et « open source » :
$\boxed{-1{,}1463 \leqslant u_{10} \leqslant -1{,}1462}$ et $\boxed{-1{,}1462 \leqslant v_{10} \leqslant -1{,}1461}$

Quelques remarques sur ces suites convergentes.
Représentation graphique de ces deux suites.



La suite (u_n) est en mauve et la suite (v_n) est en vert. On lit les valeurs d'une suite sur l'axe des abscisses (cours sur les suites définies par récurrence).

Les deux suites sont adjacentes et convergent vers la valeur l vérifiant $l = \ln\left(\frac{1}{2-l}\right)$
En appliquant l'exponentielle aux deux membres cette équation devient : $e^l = \frac{1}{2-l}$
D'après le résultat de la question B_4, α est un candidat solution pour l.
Cette dernière équation peut s'écrire $(2-l)e^l - 1 = 0$ ou $\varphi(l) = 0$. En se servant des résultats de la partie A, les seules solutions sont α et β. $-2 \leqslant l \leqslant 0$ donc $\boxed{l = \alpha.}$