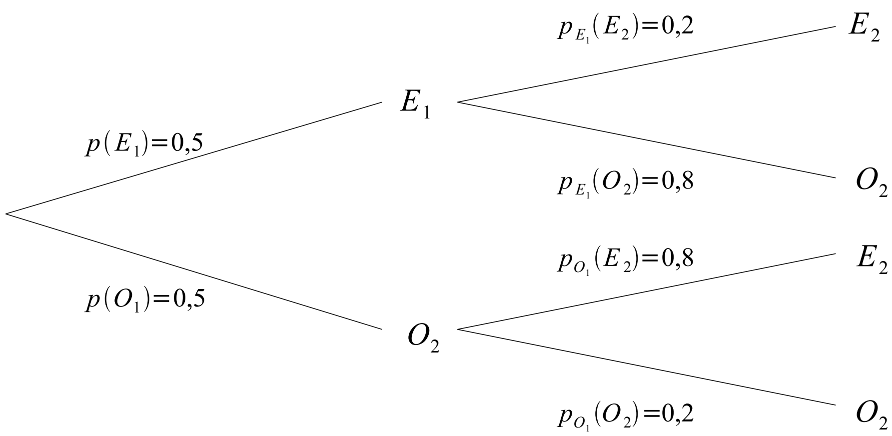
Probabilités, France septembre 2006.

En arrivant en haut de la falaise, il y a deux directions au choix pour un touriste, plage est et plage ouest.

Partie A.

Un touriste se retrouve deux jours consécutif sur la falaise.
On note E_i l'événement « le touriste choisit la plage est le $i^{ème}$ jour et O_i l'événement « le touriste choisit la plage ouest le $i^{ème}$ jour.
Le premier jour il choisit au hasard donc $p(E_1)=p(O_2)=0{,}5$. Le second jour, la probabilité qu'il choisisse une direction opposé à celle du premier vaut 0,8 donc $p_{E_1}(O_2)=p_{O_1}(E_2)=0{,}8$ et $p_{E_1}(E_2)=p_{O_1}(O_2)=0{,}2$.

1 On obtient l'arbre de probabilités suivant :



2 D'après l'énoncé, $p(E_1)=0{,}5$ et $p_{E_1}(O_2)=0{,}8$

$$p(E_1\cap E_2)=p_{E_1}(E_2)\times p(E_1)=0{,}5\times 0{,}2=0{,}1\,.$$

3 L'événement « le touriste se rend sur la même plage deux jours de suite » est :

$$(E_1\cap E_2)\cup(O_1\cap O_2)$$

$(E_1\cap E_2)$ et $(O_1\cap O_2)$ sont incompatibles donc :

$$p\big((E_1\cap E_2)\cup(O_1\cap O_2)\big)=p(E_1\cap E_2)+p(O_1\cap O_2)=0{,}2$$

Partie B.

On suppose que n, $n\leqslant 3$, touristes se retrouvent sur la falaise. Chacun choisit au hasard et indépendamment des autres une direction, donc on répète n fois, de façon indépendante, une même expérience élémentaire qui a deux issues, donc il y a en tout 2^n issues possibles [1].

1 On verra que ce type d'expérience est appelée expérience de Bernoulli.

X est la variable aléatoire donnant le nombre de touristes qui choisissent la plage est, donc X prend toutes les valeurs entières entre 0 et n.

1 Soit $0 \leqslant k \leqslant n.$ Chaque touriste choisit au hasard une direction donc les 2^n issues ont la même probabilité.

Pour calculer la probabilité de l'événement $(X=k)$ [2] il suffit de compter le nombre de cas favorables. On modélise une issue par une p-liste ordonnée comportant que des E et des O. L'issue est favorable si cette issue comporte k éléments E, donc il faut choisir k places non ordonnées parmi n, c'est une combinaison de k parmi n.

$$p(X=k)=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}=\binom{n}{k}0{,}5 = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}0{,}5^n$$

2 Les deux plages sont désertes au départ. Un touriste est *heureux* s'il est seul sur une plage.

a Il y a au moins 3 touristes, $n \geqslant 3,$ donc il y a au plus un touriste *heureux*[3].

b L'événement « un touriste est *heureux* » est $(X=1 \text{ ou } X=n-1).$
$X=1$ et $X=n-1$ sont incompatibles donc la probabilité p est :

$$p=p((X=1)\cup(X=n-1))=\binom{n}{1}0{,}5^n+\binom{n}{n-1}0{,}5^n=2\binom{n}{1}0{,}5^n=\frac{n}{2^{n-1}}$$

c Il y a 10 touristes donc $p=\frac{10}{2^9}\simeq 0{,}02$ à 10^{-2} près.

2 Dans une expérience de Bernoulli dont les issues sont par exemple « gagné » et « perdu » avec une probabilité respective p et $q = 1 - p$. La variable aléatoire X qui indique le nombre de fois où l'on gagne suit une loi binomiale (voir la formule du binôme de Newton) de la forme $p(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ En effet, il y a $\binom{n}{k}$ issues favorables de probabilité $p^k q^{n-k}$ chacune. Dans le cas de cette exercice, $p=q=0{,}5$ d'où le résultat.

3 C'est ce qu'on appelle le principe des tiroirs, s'il y a plus de pairs de chaussettes que de tiroirs il y a au moins un tiroir qui contient plus d'une paire. (Ce principe n'est valable que pour les gens qui rangent leurs chaussettes dans des tiroirs). Ici, il y a plus de touristes que de plages.