Amérique du Sud. Novembre 2006 Lien : Sujet n°2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(A\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. On considère les points $M(m)$, $N(n)$ et $P(p)$.

1 a. Pour tout point S du *plan S* et $\overrightarrow{OS}$ ont la même affixe donc $\overrightarrow{MP}$ a pour affixe $m-p$ et $\overrightarrow{MN}$ a pour affixe $m-n$.

Ecrivons ces affixes sous forme exponentielle :

si $k=\|\overrightarrow{MP}\|=MP$ et $\alpha=(\vec{u}\,;\overrightarrow{MP})$ alors $p-m=k\,e^{i\alpha}$

si $l=\|\overrightarrow{MN}\|=MN$ et $\beta=(\vec{u}\,;\overrightarrow{MN})$ alors $n-m=l\,e^{i\beta}$

$$\frac{p-m}{n-m}=\frac{k\,e^{i\alpha}}{l\,e^{i\beta}}=\frac{k}{l}e^{i(\alpha-\beta)}\quad\text{donc}\quad arg\left(\frac{p-m}{n-m}\right)=arg\left(\frac{k}{l}e^{i(\alpha-\beta)}\right)=\alpha-\beta=(\vec{u}\,;\overrightarrow{MP})-(\vec{u}\,;\overrightarrow{MN})$$

$$\text{et}\quad \boxed{arg\left(\frac{p-m}{n-m}\right)=(\overrightarrow{MN}\,;\overrightarrow{MP})}$$

1 b. $$\boxed{\left|\frac{p-m}{n-m}\right|=\left|\frac{k}{l}e^{i(\alpha-\beta)}\right|=\frac{k}{l}=\frac{MP}{MN}}$$

2 On considère les points $A(4+i)$, $B(1+i)$, $C(5i)$ et $D(-3-i)$.

Voir le graphique à la fin du document.

3 On considère la fonction *f* du plan dans lui-même définie par :

$$f\ :\ M(z)\to M'(z')\quad\text{avec}\quad z'=(1+2i)z-2-4i$$

3 a. Image de A : $z'=(1+2i)(4+i)-2-4i=(4-2+i+8i)-2-4i=5i=z_C$

$$\boxed{f(A)=C}$$

Image de B : $z'=(1+2i)(1+i)-2-4i=(1-2+i+2i)-2-4i=-3-i=z_D$

$$\boxed{f(B)=D}$$

3 b. Si $\Omega(\omega)$ est un point fixe alors :

$$\omega=(1+2i)\omega-2-4i\Leftrightarrow-2i\omega=-2-4i\Leftrightarrow i\omega=1+2i\Leftrightarrow\omega=(1+2i)(-i)\Leftrightarrow\omega=2-i$$

<u>*f* admet un unique point fixe $\Omega(2-i)$</u>

4 a. $z'=(1+2i)z-2-4i\Leftrightarrow z'-z=2iz+2i^2-4i\Leftrightarrow z'-z=-2i(-z-i+2)$

$$\boxed{z'-z=-2i(2-i-z)}$$

4 b. $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z-z'$ et $\overrightarrow{M\Omega}$ a pour affixe $m-\omega$.

Pour $M\neq\Omega$,

$$\boxed{\frac{MM'}{M\Omega}=\left|\frac{z'-z}{2-i-z}\right|=|-2i|=2}$$

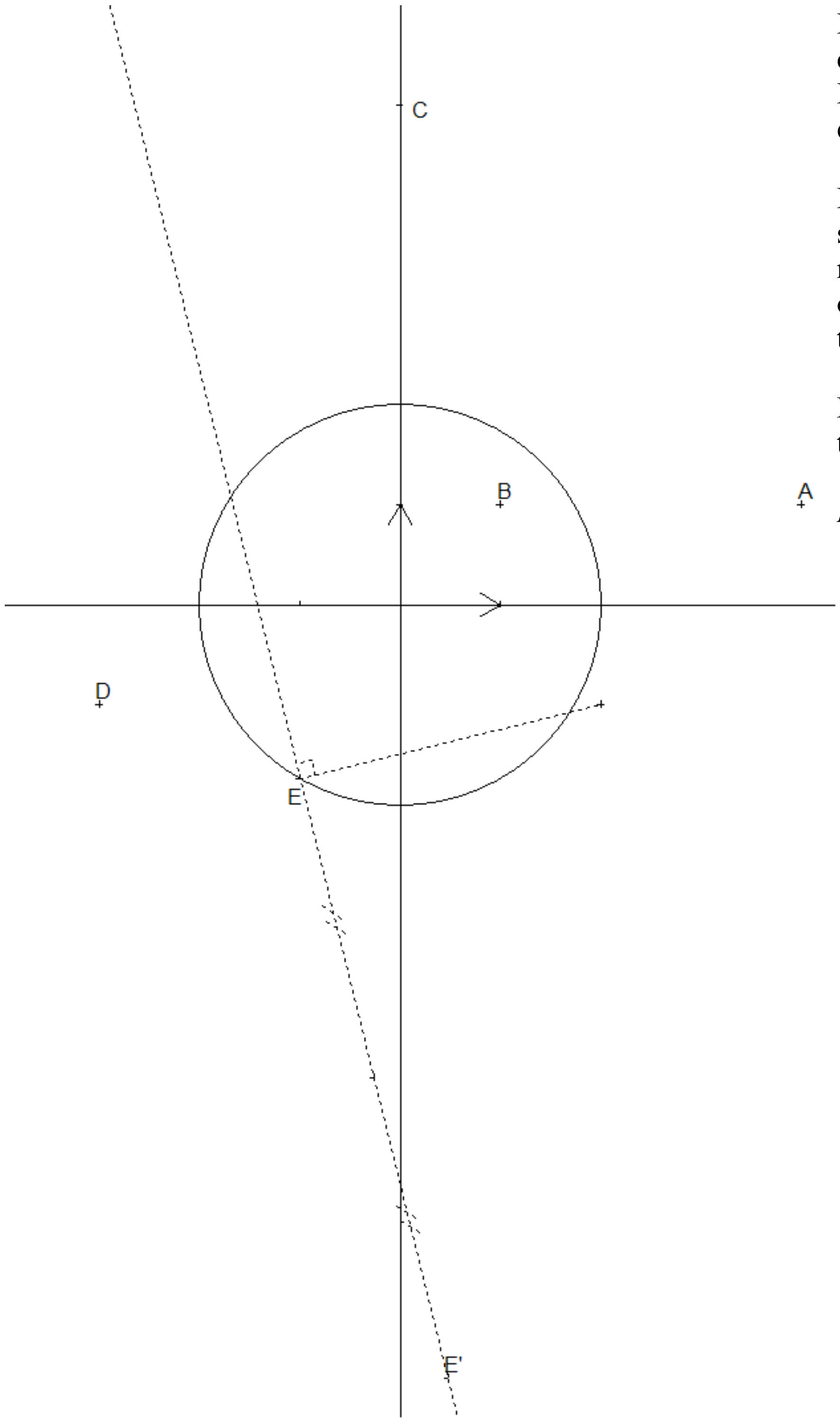
$$\boxed{(\overrightarrow{M\Omega}\,;\overrightarrow{MM'})=arg\left(\frac{z'-z}{2-i-z}\right)=arg(-2i)=\frac{-\pi}{2}}$$

4 c. $(\overrightarrow{M\,\Omega}\,;\overrightarrow{MM'})=\dfrac{-\pi}{2}$ donc $\Omega M\,M'$ est un triangle direct rectangle en *M*.

4 d. Soit $E\left(-1-i\sqrt{3}\right)$

$$\left|-1-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{1+3}=2 \quad \text{et} \quad \begin{cases}\tan\theta=\sqrt{3}\\ \sin\theta<0\end{cases} \quad \text{donc} \quad \theta=\frac{-2\pi}{3}$$

$$z_E=2e^{\frac{-2i\pi}{3}}$$



Le point *E* est sur le cercle de centre l'origine et de rayon 2. La partie réelle de son affixe est -1.

Le point Ω n'a pas de nom sur cette figure (je pourrais en mettre un mais c'est une opération délicate qui prend du temps)

Pour construire le point *E'* on trace la perpendiculaire en *E* à $[\Omega E]$

E' vérifie :

$(\overrightarrow{E\,\Omega}\,;\overrightarrow{EE'})=\dfrac{-\pi}{2}$

$\dfrac{EE'}{E\,\Omega}=2$