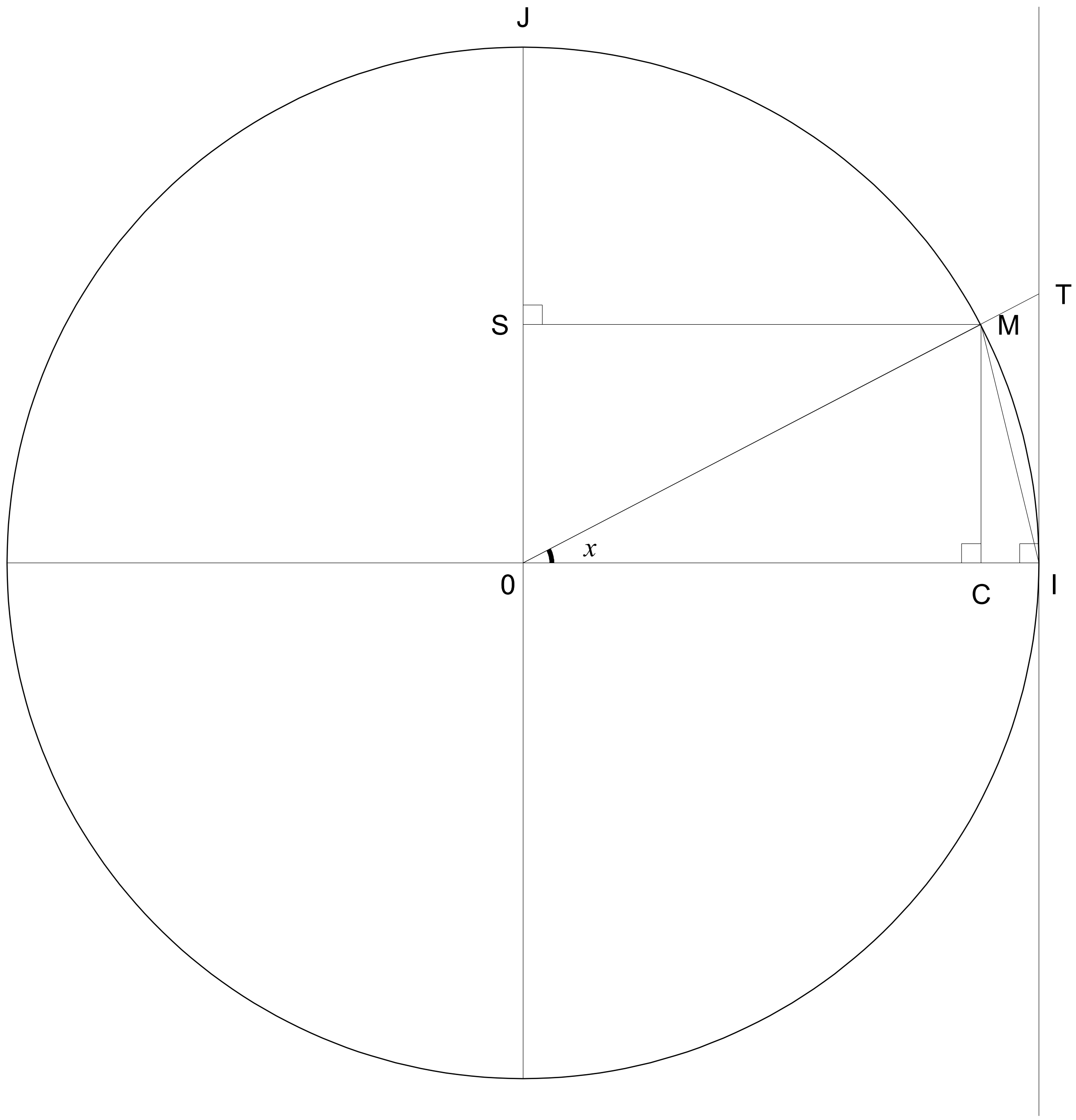
Limites remarquables de sinus et cosinus.

Partie A. *Calcul d'aire.*

Soit x un réel de l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, et M un point du cercle trigonométrique Γ tel que la mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ soit égale à x. Les éléments géométriques utilisés par la suite sont décrits dans la figure ci-dessous.



1 Exprimer, en fonction de x, les longueurs OC, CM et IT.
2 Exprimer, en fonction de x, les aires des triangles MOI et TOI.
3 Exprimer, en fonction de x, l'aire du secteur circulaire MOI.

4 Déduire des questions précédentes que pour tout $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$:

$$\sin x < x < \tan x .$$

Partie B. *Deux limites remarquables.*

On admettra que les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

1 Déduire de la question A. 4 que pour tout $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

2 En déduire la limite en 0 par valeurs supérieures de $\frac{\sin x}{x}$

3 Démontrer que la fonction $f\,:\,x \in \mathbb{R}^* \to \frac{\sin x}{x}$ est paire.

En déduire la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$

4 Démontrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right[\cup \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$:

$$\frac{1}{1+\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{1-\cos x}{x^2}$$

5 En déduire la limite en 0 de $\frac{1-\cos x}{x^2}$ puis de $\frac{\cos x - 1}{x}$

6 En déduire le nombre dérivé de sinus et de cosinus en 0.

Quelques rappels.

Pour $x \in [0\,;2\,\pi]$, la mesure en radians d'un angle est la longueur de l'arc du cercle trigonométrique.

L'aire d'un secteur circulaire est proportionnelle à son angle (pour un même disque).

Revoir les propriétés des inégalités et inéquations. (cours de seconde sur le site).