Exercice 1 Q.C.M. ***4 points***
Commun à tous les candidats.

Aucune justification n'est demandée mais un corrigé se doit de donner des explications.

1_ Le prix augmente de 20% puis de 30% donc de 56%. Réponse c.

Le prix augmente de 20% donc il est multiplié par 1,2 , $\left(1+\frac{20}{100}\right)$, puis il augmente de de 30% donc il est multiplié par 1,3. Le coefficient multiplicateur total est $1{,}2\times 1{,}3=1{,}56$
Le prix d'un objet passe de 100 à 156 donc a augmenté de 56 pour cent, 56%.

2_ $\frac{\ln \mathrm{e}}{\ln \mathrm{e}^2}=\frac{1}{2}$. Réponse c.

Il suffit d'écrire la formule sur la calculatrice.
$\frac{\ln \mathrm{e}}{\ln \mathrm{e}^2}=\frac{\ln \mathrm{e}}{2\ln \mathrm{e}}=\frac{1}{2}$.

3_ $\mathrm{e}^{-3\ln 2}=\frac{1}{8}$. Réponse b.

Il suffit d'écrire la formule sur la calculatrice.
$\mathrm{e}^{-3\ln 2}=\mathrm{e}^{\ln 2^{-3}}=2^{-3}=\frac{1}{8}$

4_ Une primitive F de f définie par $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}$ est définie par $F(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$
Réponse a.

On peut dériver les fonctions F proposées selon le modèle $\left(\mathrm{e}^u\right)'=u'\mathrm{e}^u$ ou $\left(\mathrm{e}^{ax+b}\right)'=a\,\mathrm{e}^{ax+b}$

$$\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right)'=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2x}\right)'=-\frac{1}{2}\left(-2\,\mathrm{e}^{-2x}\right)=\mathrm{e}^{-2x}=f(x)$$
$$\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right)'=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2x}\right)'=-\frac{1}{2}\left(-2\,\mathrm{e}^{-2x}\right)=-\mathrm{e}^{-2x}\neq f(x)$$
$$\left(-2\,\mathrm{e}^{-2x}\right)'=-2\left(\mathrm{e}^{-2x}\right)'=-2\left(-2\,\mathrm{e}^{-2x}\right)=4\,\mathrm{e}^{-2x}\neq f(x)$$

5_ Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 est $y=x+1$ Réponse a.

On trace les représentations graphiques. Attention, $y=\mathrm{e}\,x$ est l'équation d'une droite de coefficient directeur e, $y=\mathrm{e}^x$ est l'équation de la courbe représentative de la fonction exponentielle. On peut tout de suite écarter la réponse c.
Justification. $f(x)=\mathrm{e}^x$ $f'(x)=\mathrm{e}^x$ $f'(0)=1$
Le coefficient directeur de la tangente est 1.

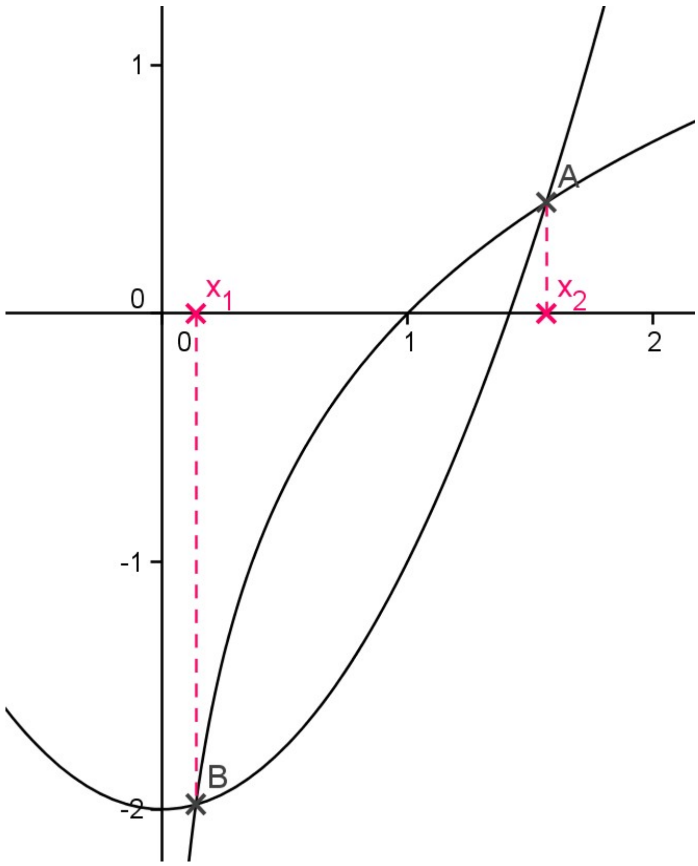
6_ La fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x-1}$ a pour ensemble de définition $]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$

Il suffit de tracer la représentation graphique.
Par le calcul, $f(x)$ existe si $e^x-1\neq 0$
$e^x-1=0$ $e^x=1$ $x=\ln 1$ $x=0$ $D_f=\mathbb{R}^*$

7_ La représentation graphique de la fonction f définie par $f(x)=2x-1+\dfrac{1}{2x}$ a une asymptote oblique d'équation $y=2x-1$ au voisinage de $+\infty$.

On trace la représentation graphique de f et les droites.
A vue de nez, quand x tend vers $+\infty$ alors $\dfrac{1}{2x}$ tend vers 0 donc $f(x)\simeq 2x-1$
Par le calcul, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x}=0$

8_ L'équation $\ln x=x^2-1$ a deux solutions positives. Réponse c.



Remarque. ln x existe si $x > 0$ donc les solutions sont positives.

Exercice 2 ***4 points***
Commun à tous les candidats.

Tableau des effectifs des fleurs cueillies au hasard :

Variété	Violettes	Primevères	Marguerites	Total
Effectif	179	133	188	500

1_ Calcul des fréquences
La fréquence est le rapport de l'effectif et de l'effectif total.

$$f_V = \frac{n_V}{n} = \frac{179}{500} = 0{,}358 \qquad f_P = \frac{n_P}{n} = \frac{133}{500} = 0{,}266 \qquad f_M = \frac{n_M}{n} = \frac{188}{500} = 0{,}376$$

2_ $d^2_{obs} = \left(f_V - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(f_P - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(f_M - \frac{1}{3}\right)^2$ donc :

$$500\ d^2_{obs} = 500\left(\left(0{,}358 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(0{,}266 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(0{,}376 - \frac{1}{3}\right)^2\right) \simeq 3{,}481 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

3_ Tableau des effectifs et effectifs cumulés croissant de la simulation d'une loi équirépartie sur l'ordinateur :

Intervalle auquel appartient 500 d^2_{obs}	[0 ; 0,5 [	[0,5 ; 1 [	[1 ; 1,5 [	[1,5 ; 2 [	[2 ; 2,5 [	[2,5 ; 3 [	[3 ; 3,5 [	[3,5 ; 4 [	[4 ; 4,5 [	[4,5 ; 5 [	Total
Nombre par intervalle	163	439	458	350	231	161	80	47	37	34	2000
Effectif cumulé croissant	163	602	1060	1410	1641	1802	1882	1929	1966	2000	

D_9 est le neuvième décile de la série donc c'est le caractère du 1800ième individu, donc D_9 est dans l'intervalle [2,5 ; 3 [.

4_ 500 $d^2_{obs} > D_9$ donc on peut rejeter l'hypothèse équiprobabilité, « il y a autant de fleurs de chaque variété », avec un risque inférieur à 10% de rejeter cette hypothèse à tort.

Exercice 3 ***5 points***
Commun à tous les candidats.

Partie A

Nombre de prêts effectués par l'agence B.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
Rang du mois x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre de prêts y_i	56	44	42	52	50	56

1_ Ajustement affine.

La droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés a pour équation :
$$y=0{,}8\,x+47{,}2$$

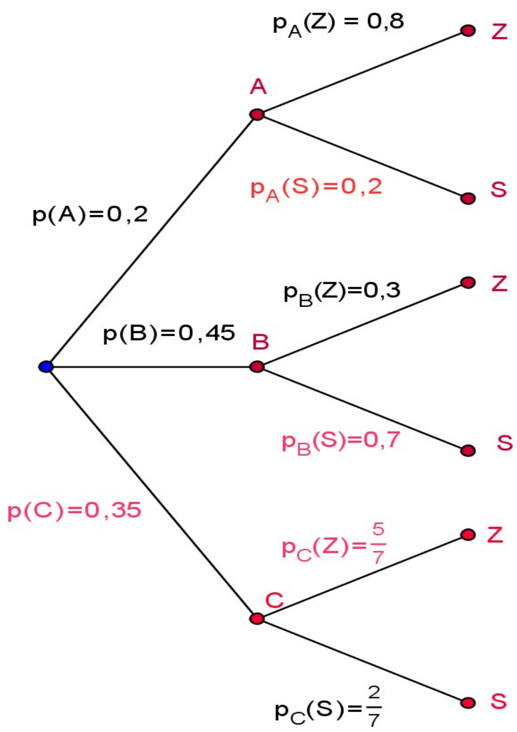
2_ Le mois de décembre a pour rang 12.

$$y=0{,}8\times 12+47{,}2=56{,}8$$
On peut prévoir qu'au mois de décembre l'agence effectuera 57 prêts.

Partie B

A est l'évènement, « les prêts sont souscrits dans l'agence A », *B*, « dans l'agence B » et *C*, «dans l'agence C ». *Z* est l'évènement, « le souscripteur prend une assurance Zen » et *S* une assurance « Speed ». Tous les souscripteurs prennent une assurance donc $S=\overline{Z}$

1_ Arbre pondéré.



2_ $p(A\cap Z)=p(A)\times p_A(Z)=0{,}8\times 0{,}2=0{,}16$

La probabilité que le client interrogé ait souscrit un prêt dans l'agence A et une assurance Zen est égale à 0,16

3_ Calcul de $p(Z)$.

$$p(Z)=p(A\cap Z)+p(B\cap Z)+p(C\cap Z)$$
$$=P(A)\times p_A(Z)+P(B)\times p_B(Z)+P(C)\times p_C(Z)$$
$$p(Z)=0{,}16+0{,}45\times 0{,}3+0{,}35\times\frac{5}{7}=0{,}16+0{,}135+0{,}25=0{,}545$$

La probabilité que le client interrogé ait souscrit une assurance Zen est égale à 0,545.

4_ $P_Z(C)=\dfrac{p(Z\cap C)}{p(Z)}=\dfrac{0{,}25}{0{,}545}=\dfrac{5}{109}$

La probabilité que le client interrogé ait souscrit un prêt dans l'agence C sachant qu'il a souscrit une assurance Zen est égale à $\dfrac{5}{109}$.

Exercice 4 ***7 points***
Commun à tous les candidats.

Préliminaires

La fonction g est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x)=6\ln x-2x^3-3$

1_ Dérivée de g.

$$g'(x)=\frac{6}{x}-6x^2$$

2_ Tableau de variations.

D'après les hypothèses g' est strictement positive sur $]0\ ;\ 1[$ et strictement négative sur $]1\ ;\ +\infty[$ donc la fonction g strictement croissante sur $]0\ ;\ 1[$ et strictement décroissante sur $]1\ ;\ +\infty[$

3_ D'après les variations de g, cette fonction atteint un maximum en $x = 1$.

$$g(1)=6\ln 1-2+3=-1$$

Le maximum de g est strictement négatif donc g est strictement négative sur $]0\ ;\ +\infty[$

Partie A

La fonction f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=x+\dfrac{3\ln x}{2x^2}$

1_ Limites.

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$$\frac{3\ln x}{2x^2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} \frac{3\ln x}{2x^2} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} 3\ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{2x^2} = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} \frac{3\ln x}{2x^2} = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x = 0 \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$$

2_a_ Fonction dérivée.

$$f'(x) = (x)' + \left(\frac{3\ln x}{2x^2}\right)' = 1 + \frac{3}{2}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)'$$

Modèle : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$u(x) = \ln x$ $\qquad u'(x) = \dfrac{1}{x}$

$v(x) = x^2$ $\qquad v'(x) = 2x$

$$\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{\frac{1}{x}x^2 - (\ln x)2x}{(x^2)^2}$$

$$\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{x - 2x\ln x}{x^4}$$

$$\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4}$$

$$\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

$$f'(x)=1+\frac{3}{2}\times\frac{1-2\ln x}{x^3}$$
$$f'(x)=1+\frac{3-6\ln x}{2x^3}$$
$$f'(x)=\frac{2x^3+3-6\ln x}{2x^3}$$
$$f'(x)=-\frac{g(x)}{2x^3}$$

2_b_ Tableau de variations.

Sur $]0\ ;\ +\infty[$, $2x^3>0$ donc f' est du signe de $-g$ donc $f'>0$.

x	0		$+\infty$
f '(x)	‖	+	
f (x)	‖ -∞	↗	+∞

Partie B

1_ F est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$F(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}\times\frac{1+\ln x}{x}$$

$$F'(x)=\frac{1}{2}(2x)-\frac{3}{2}\left(\frac{1+\ln x}{x}\right)'$$
$$F'(x)=x-\frac{3}{2}\left(\frac{1+\ln x}{x}\right)'$$

Modèle : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$u(x)=1+\ln x$ $\qquad u'(x)=\frac{1}{x}$

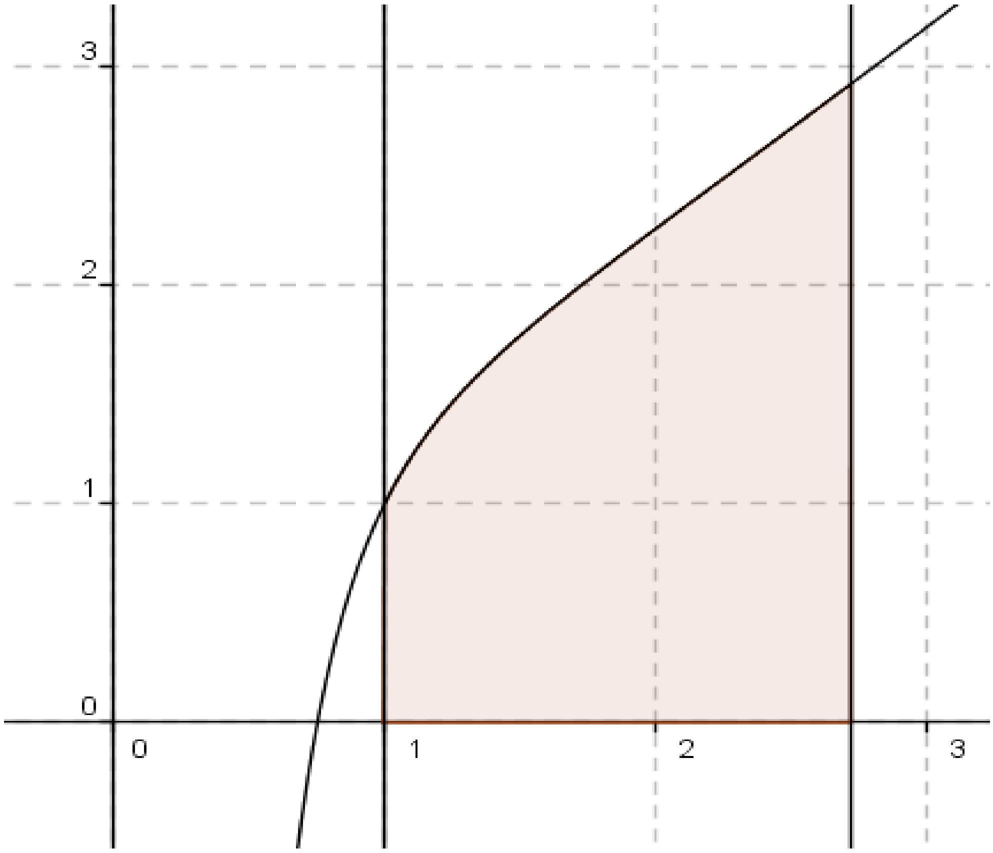
$v(x)=x$ $\qquad v'(x)=1$

$$\left(\frac{1+\ln x}{x}\right)'=\frac{\frac{1}{x}\times x-(1+\ln x)}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2}$$

$$F'(x) = x - \frac{3}{2}\left(\frac{-\ln x}{x^2}\right)'$$
$$F'(x) = x + \frac{3\ln x}{2x^2}$$

$F'(x) = f(x)$ donc F est une primitive de f.

2_ Calcul d'une aire.

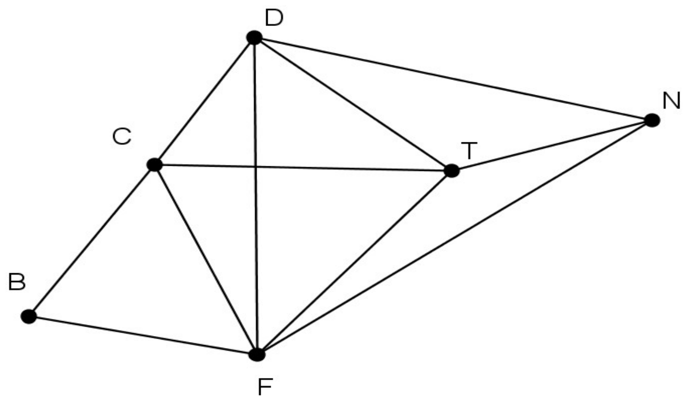


Sur l'intervalle [1 ; e] la fonction f est positive donc l'aire coloriée est égale à :

$$A = \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,dx = [F(x)]_1^{\mathrm{e}} = F(\mathrm{e}) - F(1)$$
$$A = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{3}{2} \times \frac{1+\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)$$
$$A = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{3}{\mathrm{e}} + 1$$
$$A = \frac{\mathrm{e}^3 + 2\mathrm{e} - 6}{2\mathrm{e}} \text{ unités d'aire}$$
$$A \simeq 3{,}59 \text{ unités d'aire à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Exercice 3 ***5 points***
Commun ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Le graphe ci-dessous représente des sommets des Alpes et les chemins qui les relient.



1_a_ Degré des sommets.

Sommet	B	C	D	F	N	T
Degré du sommet	2	4	4	5	3	4

1_b_ Deux sommets quelconques sont toujours relié par une chaîne donc ce graphe est connexe.

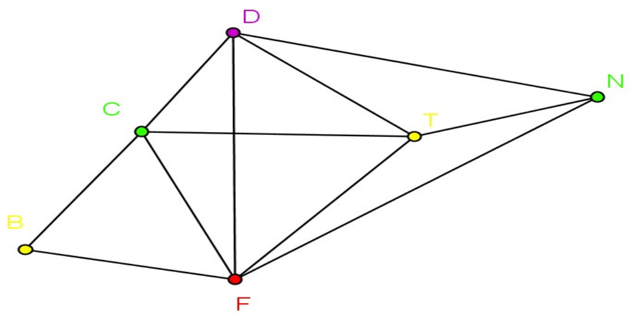
2_ Il y a exactement deux sommets de degré impair donc il existe une chaine eulérienne, par exemple la chaîne F-B-C-F-D-C-T-N-D-T-F-N. En suivant ce trajet le groupe parcourt une et une seule fois chaque chemin.

3_ Nombre chromatique n.
On peint les sommets et deux sommets adjacents sont de couleur différentes.

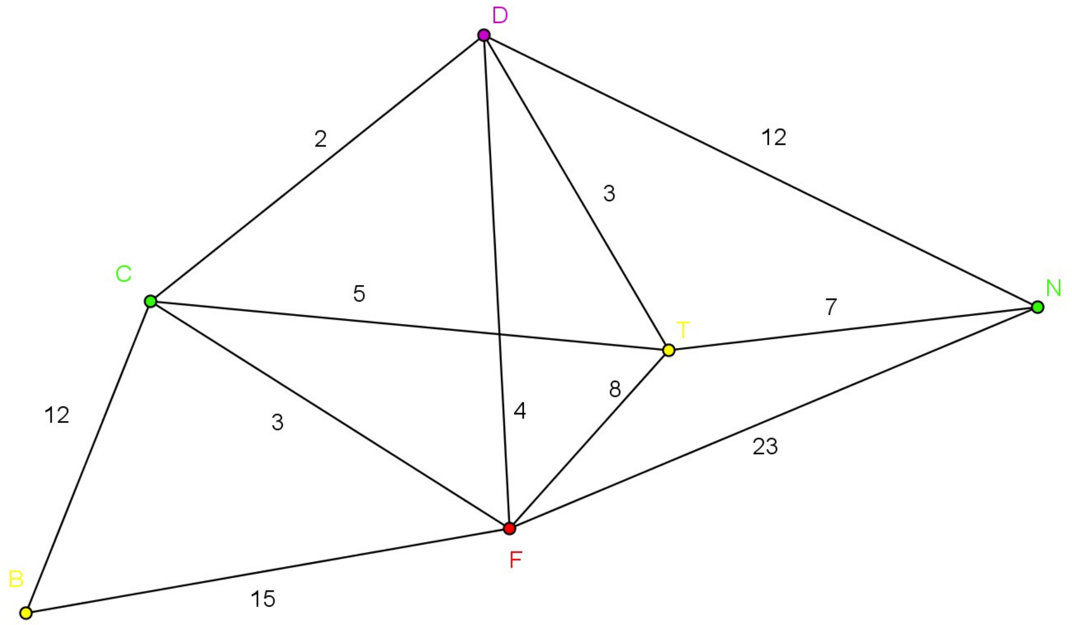
3_a_ FCDT est un graphe complet de d'ordre 4 donc $n \geqslant 4$.
Le degré maximal est 5 donc $n \leqslant 6$.
$4 \leqslant n \leqslant 6$

3_b_ Coloriage.

Sommet	F	C	D	T	N	B
Degré du sommet	5	4	4	4	3	2



4_ Graphe pondéré.
Les pondérations représentent les distances.



Recherche d'une chaîne de longueur minimum joignant B et N.
Dans chaque ligne, les cases vertes correspondent au minimum de la ligne.
Dans chaque colonne, les cases violettes correspondent aux cases dont la valeur est égal au minimum et donc a un chaîne de même longueur reliant A et le point de la colonne.
Dans chaque colonne, on barre les nombres qui ne sont pas des minima
Un point est fixé quand on a parcouru toutes ses arêtes (sans revenir en arrière)

Point fixé	C		F		D		T		N	
B	12	B	15	B						
C			15	C	14	C	17	C		
D			~~19~~	~~D~~			17	D	26	N
T			~~21~~	~~F~~					24	N

On a trouvé deux chaines de longueur 24, B-C-D-T-N et B-C-T-N, mais F n'est pas fixé.

Point fixé	C		F		D		T		N	
B	12	B	15	B						
C			15	C	14	C	17	C		
D			~~19~~	~~D~~			17	D	26	N
T			~~21~~	~~F~~					24	N
F	~~18~~	~~F~~			~~20~~	~~F~~	~~23~~	~~F~~	~~38~~	~~F~~

On a trouvé deux chaînes minimales de longueur 24, B-C-D-T-N et B-C-T-N.