Corrigé du baccalauréat Asie juin 2005.

Exercice 1.

Question 1. $p(E)=p(E/A)\,p(A)+P(E/B)\,p(B)=0{,}36$. Réponse d.

Question 2. A et G sont indépendant donc $B=\overline{A}$ et G sont indépendants.
$x=p(G/B)=p(G)=p(G/A)=0{,}3$ Réponse c.

Question 3. On répète quatre fois une même expérience de façon indépendante donc on est dans le schéma de Bernouilli. L'évènement contraire de E, "on obtient au moins une fois A", est l'évènement "on obtient jamais A" ou "on obtient 4 fois B".
$p(E)=1-p(\overline{E})=1-p(BBBB)=1-p(B)^4=1-0{,}65^4\simeq 0{,}821\ 493\ 75$ Réponse b.

Exercice 2.

Partie A.

Soit la fonction *f* définie sur [0 ; +∞[par : $f(x)=\dfrac{20}{1+15\ e^{-0{,}4\ x}}$

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} -0{,}4\ x=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0{,}4\ x}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=20$

La courbe de *f* admet une asymptote horizontale d'équation y = 20 en +∞.

2 La fonction linéaire *g* définie par $g(x)=-04\ x$ est décroissante, la fonction exponentielle est croissante donc la fonction $h=\exp\circ g$ est décroissante $(h(x)=\exp\circ g(x)=\exp(g(x))=e^{-0{,}4\ x})$.

La fonction $l=1+15\ h$ est décroissante sont inverse est croissante et $f=\dfrac{20}{l}$ est croissante.

On peut aussi calculer la fonction dérivée.

$$f'(x)=20\ \frac{-(1+15\ e^{-0{,}4\ x})'}{(1+15\ e^{-0{,}4\ x})^2}=-20\ \frac{15\times(-0{,}4)e^{-0{,}4\ x}}{(1+15\ e^{-0{,}4\ x})^2}=120\ \frac{e^{-0{,}4\ x}}{(1+15\ e^{-0{,}4\ x})^2}$$

Une exponentielle est toujours positive donc $f'>0$ et *f* est croissante.

Partie B.

La fonction *f* modélise sur [0 ; 14] le coût de production, en euro, d'un produit. Sa représentation graphique sur [0 ; 14] est notée Γ .

Pour une quantité de produit *q*, exprimée en tonnes et comprise entre 0 et 14 :

$f(q)=\dfrac{20}{1+15\ e^{-0{,}4\ q}}$ est le coût total et $\dfrac{f(q)}{q}$ le coût moyen.

1 Q est le point de Γ d'abscisse q.

Le coefficient directeur de la droite (OQ) est : $p=\dfrac{y_Q-y_O}{x_Q-x_O}=\dfrac{f(q)-0}{q-0}=\dfrac{f(q)}{q}$.

C'est donc le coût moyen.

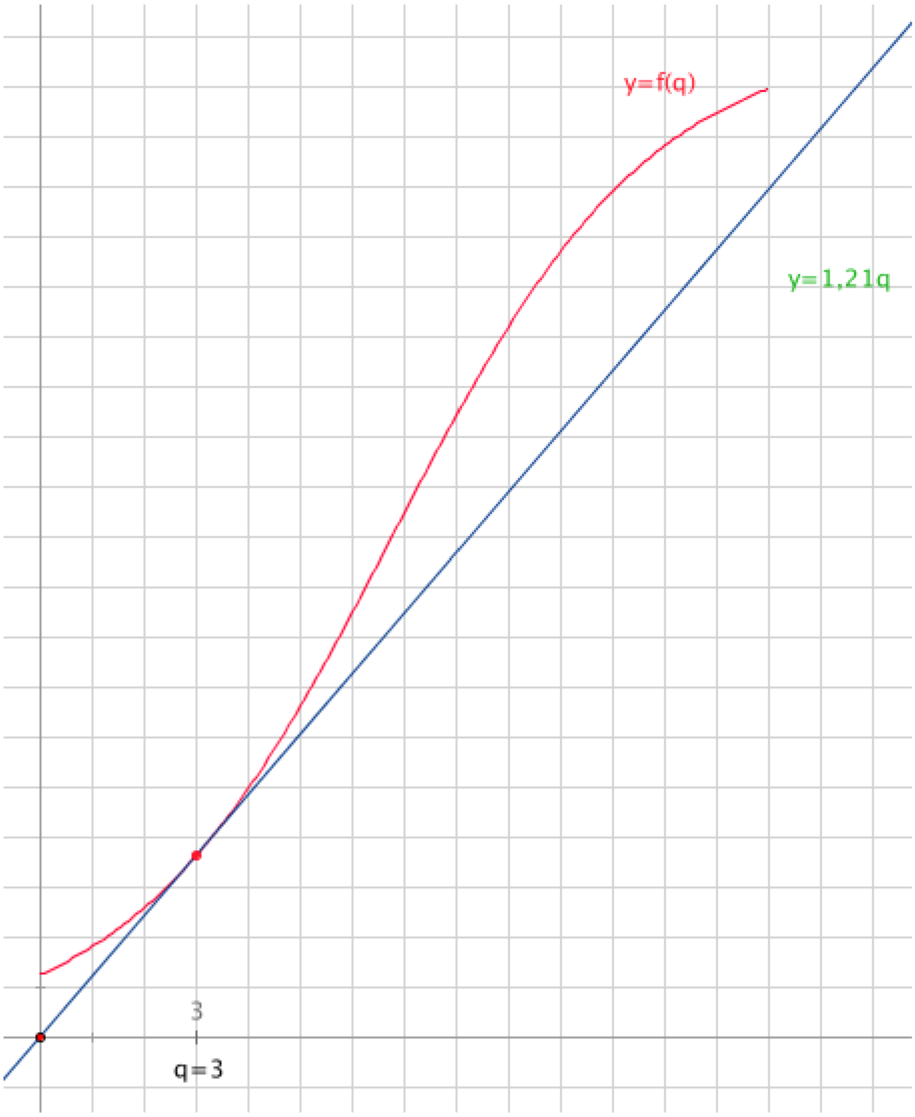
2 Pour déterminer graphiquement le coût moyen minimum on doit trouver la droite (OQ) de plus faible pente. (A l'aide d'une règle qu'on fait pivoter autour de O). On obtient ce graphique.

La production doit être égale environ à 3 tonnes, $q = 3$, et le coût moyen minimum sera environ :

$$c_m \simeq \frac{f(3)}{3} = \frac{20}{3\ (1 + 15\ e^{-0,4 \times 3})} \qquad c_m \simeq 1,208 \text{ euro par tonne.}$$

Le graphique donne $c_m \simeq 1,21$ euro par tonne.

Annexe 1.



Exercice 3.

C_f est la courbe représentative de f sur [0 ; 6]. A et B ont pour coordonnées respectives (-1 ; 0) et (1 ; 5).

1 La droite (AB) est tangente en à la courbe C_f au point B d'abscisse 1 donc :

$$f'(1)=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{5}{1-(-1)}=\frac{5}{2.}$$

2 D'après la courbe C_f, la fonction f est croissante puis décroissante et atteint son maximum en $x\simeq 1{,}2$ donc la fonction dérivée est positive sur [0 ; 1,2] et négative sur [1,2 ; 6].

La courbe C_3 est au dessus de l'axe ($0x$) donc la fonction est positive et n'est pas la dérivée de f.

On sait que $f'(1)=\frac{5}{2}$. La courbe C_2 passe par le point M de coordonnées (1 ; 1,5) donc la fonction correspondant à C_2 n'est pas la dérivée de f (sinon $f'(x)=1{,}5$).

La courbe C_1 passe par le point N(1 ; 2,5) et coupe l'axe des abscisses en x = 1,2 (au dessus puis en dessous) donc elle correspond bien à la courbe de f'. (De toute manière c'est la seule qui reste).

Exercice 4.

Partie A.

Le tableau suivant donne le prix d'une tonne de matière première en milliers d'euros au 1er janvier de chaque année :

Année	1998	1999	2000	2001
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3
Prix d'une tonne en milliers d'euro y_i	6,48	5,74	5,19	5,01

1 Nuage de points.
Voir le graphique.

2 a La droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés a pour équation :

$$y=-0{,}496\ x+6{,}349 \quad \text{à } 10^{-3} \text{ près.}$$

b En supposant que cet ajustement soit valable pour les années suivantes le prix au 1er janvier 2005 serait 2 877 euros la tonne : $y=-0{,}496\times 7+6{,}349=2{,}877$

Partie B.

En fait les prix commencent à remonter à partir de 2001 comme le montre le tableau suivant :

Année	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année : x_i	3	4	5	6
Prix d'une tonne en milliers d'euro y_i	5,01	5,10	5,20	5,52

1 Nuage de points complété. Voir graphique.

2 La fonction f définie sur [0 ; 11] modélise l'évolution des prix de 1998 à 2008 :

$$f(x)=x+10-5\ln(x+2).$$

a Tableau de valeurs de $f(x)$ arrondies à 10^{-2} près.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(x)$	6,53	5,51	5,07	4,95	5,04	5,27	5,60	6,01	6,49	7,01	7,58	8,18

b Variations de f.

$$f'(x)=1-\frac{5}{x+2}=\frac{x+2-5}{x+2}=\frac{x-3}{x+2}.$$

Sur [0 ; 11] $x+2>0$ donc f' a le même signe que $x-3$.

Tableau de variations de f.

x	0		3		11
f '(x)		–	0	+	
f(x)	6,53	↘	4,95	↗	8,18

c Courbe de f. Voir le graphique.

3 a Selon ce modèle le prix de au 1er janvier 2005 serait 6 014 euros la tonne.

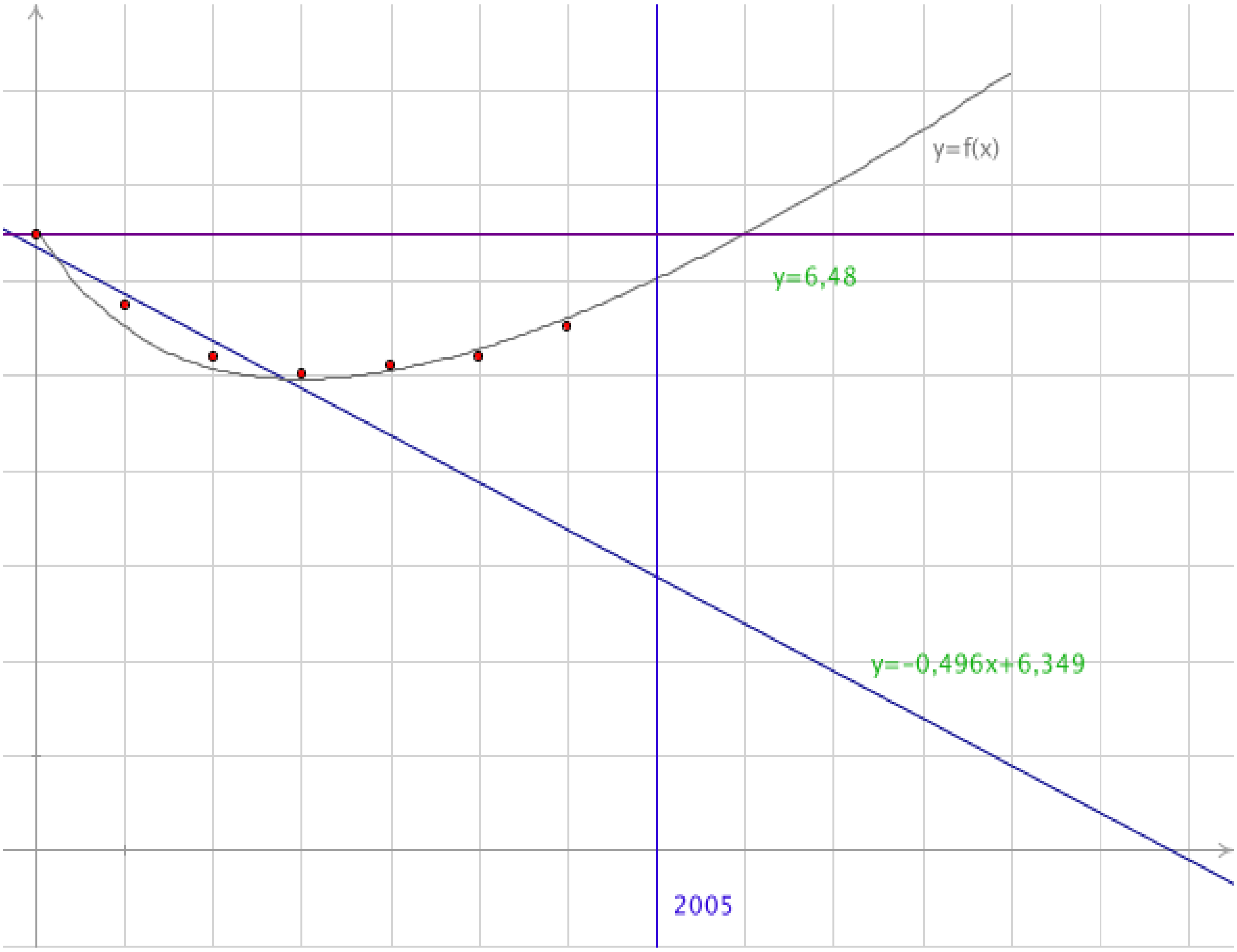
$$f(7)=17-5\ln 9\simeq 6{,}014.$$

Graphiquement le prix serait d'environ 6 000 euros la tonne.

b Année où le prix retrouvera sa valeur de 1998.

Par le calcul il faudrait résoudre $f(x)=6{,}48$. On ne sait pas résoudre cette équation.
D'après le tableau de valeurs à la fin de l'année 2005 le prix retrouvera sa valeur de 1998.
D'après le graphique au 1er janvier 2006 le prix retrouvera sa valeur de 1998.

Nuage de points, courbe de la fonction *f* et lectures graphiques.



Exercice 2. Spécialité mathématique.

Soit $C(x, y) = 2x + 0{,}5y^2 + 4$ le coût de production d'un alliage comportant x tonnes du métal A et y tonnes du métal B.

Partie 1.

1 Par lecture graphique sur la figure 2 (la figure 1 n'est vraiment pas claire car le maillage de la surface est de 15 sur 15 alors que celui du plan de base (*x0y*) est de 20 sur 12).
Il y a 5 courbes de niveau, pour $x = 0$ et $y = 0$ le niveau est $z = 4$, le niveau z croît quand x et y croîent, et les courbes varient de 20 en 20. Les courbes sont $z=20$, $z=40$, $z=60$, $z=80$ et $z=100$.
Le point $N(12 ; 8 ; 60)$ appartient à la surface. Réponse c.
(On peut vérifier que $C(12 ; 8) = 60$).

2 La courbe de niveau $z = 20$ a pour équation : $2x + 0{,}5y^2 + 4 = 20$ ou $x = 0{,}25y^2 + 8$.
La courbe est une parabole d'axe (*0x*). Réponse a.

Partie 2.

Les métaux sont achetés au prix de 0,5 k€ la tonne pour A et 1 k€ pour B. L'entreprise affecte 11 k€ à l'achat des métaux donc x et y vérifient l'équation :

$$0{,}5x + y = 11$$

1 On achète 4 tonnes du métal A : $0{,}5 \times 4 + y = 11 \Rightarrow y = 9$.
Donc on achète 9 tonnes de B.

2 $0{,}5x + y = 11 \Rightarrow x + 2y = 22$

3 a Ensemble des points dont l'équation est $x + 2y = 22$. Voir graphique.

b Graphiquement la droite d'équation $x + 2y = 22$ est tangente à la courbe de niveau $z = 40$ et au dessus de cette courbe donc le coût minimum est atteint pour