Corrigé du devoir à la maison de Maths.

On veut étudier une fonction f définie et dérivable sur] 0 ; + ∞ [.

On sait que $f'(x)=\frac{1}{x}$ et que $f(1)=0$

I Variations de f.

f est définie sur] 0 ; + ∞ [donc $x>0$ et $f'(x)=\frac{1}{x}>0$.

D'où le tableau de variation suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	‖	↗	

II Approximation affine de $f(2)$.

1.- Approximation affine.

$$f(a+h)\approx f(a)+h.f'(a)$$

On prend a=1 et h=1 :

$$f(1+1)\approx f(1)+1\times f'(1)$$

$f(1)$=0 et $f'(1)$ = 1 :

$$f(1+1)\approx 0+1$$

$$\boxed{f(2)\approx 1}$$

2.- Deuxième approximation de $f(2)$.

a) a= 1 et h = 0,5

$$f(1.5)=f(1+0.5)\approx f(1)+0.5\,f'(1)\approx 0.5$$

$$f(1.5)\approx \alpha=0{,}5$$

b) a = 1,5 et h = 0,5

$$f(2)=f(1.5+0.5)\approx f(1.5)+0.5\,f'(1.5)\approx \alpha+0.5\,f'(1{,}5)=0{,}5+\frac{0{,}5}{1{,}5}$$

$$\boxed{f(2)\approx 0{,}833}$$

III Propriété fondamentale de la fonction f.

1.- $g(x)=f(2x)$

$g'=u'f'(u)$ $\quad u=2x \quad u'=2$

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $f'(u)=\dfrac{1}{u}$ et $f'(u(x))=f'(2x)=\dfrac{1}{2x}$

$g'(x)=2\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{x}$

D'où $\boxed{g'=f'.}$

2.- $h(x)=f(3x)$ $\qquad h'=(u'f'(u))$

$u=3x\ u'=3$ et $f'(u(x))=\dfrac{1}{3x}$

$h'(x)=3\dfrac{1}{3x}=\dfrac{1}{x}$ $\qquad$ D'où $\boxed{h'=f'.}$

3.- Pour $a>0$ $\qquad h(x)=f(ax)$ $\qquad h'=(u'f'(u))$

$u=ax \qquad u'=a \qquad f'(ax)=\dfrac{1}{ax}$

$h'(x)=a\dfrac{1}{ax}=\dfrac{1}{x}$ $\qquad$ Donc $\boxed{h'=f'.}$

4.- Soit l la fonction définie sur] 0 ; +∞ [par $l=(f-h)$
On a démontrer que $f'=h'$ donc pour tout x de] 0 ; +∞ [$\boxed{l'(x)=0.}$

Tableau de variations

x	0		$+\infty$
$l'(x)$		0	
$l(x)$		→	

5.- $l=(f-h)$

$h(x)=f(ax)\ et\ f(1)=0.$
$l(1)=f(1)-h(1)=f(1)-f(a)$
$\boxed{l(1)=-f(a)}$

***l* est une fonction constante donc :** $l(x)=l(1)$
$I(x)=f(x)-h(x)=f(x)-f(ax)$ **donc :** $f(x)-f(ax)=-f(a)$ **ou encore**

$$\boxed{f(ax)=f(a)+f(x).}$$

IV Nouvelle approximation de *f*(2).

1.- $f(ax)=f(a)+f(x)$

$f(a^2)=f(aa)=f(a)+f(a)=2f(a)$

$f(a^3)=f(aaa)=f(a)+f(a)+f(a)=3f(a)$

$f(a^4)=f(aaaa)=f(a)+f(a)+f(a)+f(a)=4f(a)$

$$\boxed{f(an)=f(\underbrace{aaa\ldots a}_{n\ facteurs})=\underbrace{f(a)+f(a)+\ldots+f(a)}_{n\ termes}=n\,f(a)}$$

2.- $\beta^{10}=2$ $\beta=\sqrt[10]{2}\approx1.0717$ à 10^{-4} près.

$f(a+h)\approx f(a)+h\,f'(a)$ $a=1$ $h=\beta-1$

$f(1+\beta-1)\approx f(1)+(\beta-1)\,f'(1)\approx 0+(\sqrt[10]{2}-1)1 \approx \sqrt[10]{2}-1$

donc $\boxed{f(\beta)\approx0.0717}$

3.- $f(\beta)=\sqrt[10]{2}-1$

Sachant que $f(an)=n\,f(a)$ on peut en déduire que $f(\beta^{10})=10\ f(\beta)$.

$\beta^{10}=2$ donc $f(\beta^{10})=f(2)=10\ f(\beta)$

$f(2)\approx10\ (\sqrt[10]{2}-1)$

$\boxed{f(2)\approx0{,}72 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$