Corrigé du baccalauréat ES, centre étranger de juin 2005.

Exercice 1.

Question 1. Attention, la fonction est affine de coefficient directeur e et d'ordonnée à l'origine ln(2) (c'est une constante donc la dérivée est nulle) donc sa fonction dérivée est $x \to e$. Réponse n° 3.

Question 2. $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ et ln(3) est une constante donc la dérivée est $x \to \frac{1}{x}$ Réponse n°2

Question 3. On teste les réponses en dérivant les fonctions. $(e^u)' = u' e^u$ donc la primitive de $x \to e^{-2x+3}$ est $x \to -\frac{1}{2} e^{-2x+3}$ Réponse n° 3.

Question 4. Une équation du second degré ($e^{2x} = (e^x)^2$) peut avoir deux solutions, une solution ou 0 solution. Le plus simple est de tracer la courbe de la fonction : $x \to e^{2x} + e^x - 6$. Il n'y a qu'un point d'intersection avec l'axe (*Ox*) donc une seule solution. Réponse n° 2.

Explication. $e^{2x} + e^x - 6 = (e^x)^2 + e^x - 6 = y^2 + y - 6$, en posant $y = e^x$.
On cherche les racines du trinôme du second degré : $\Delta = b^2 - 4ac = 25$.

$$y_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -3 \qquad y_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 2$$

$y_1 = e^{x_1} = -3$ impossible, une exponentielle est toujours positive.

$y_2 = e^{x_2} = 2 \Rightarrow x_2 = \ln(2)$.

Donc l'équation a une seule solution, ln(2).

Question 5. Comme à la question 4, on trace la courbe, mais on ne voit pas bien ce qui se passe près de zéro donc il faut regarder le tableau de valeurs et calculer l'image de pour x près de 0 (10^{-1}, 10^{-2}...). On voit que la fonction est positive donc il y a deux solutions. On peut aussi se servir de la limite en 0 qui est la même que (ln *x*)². Réponse n° 1.

Explication. En posant $y = \ln(x)$, on obtient le même trinôme et les racines sont :

$y_1 = \ln(x_1) = -3 \Rightarrow x_1 = e^{-3}$

$y_2 = \ln(x_2) = 2 \Rightarrow x_2 = e^2$.

Question 6. On teste les 3 "candidats" dans l'équation. Seul $\frac{\ln 2{,}2}{\ln 1{,}1}$ convient. Réponse n° 3.

Explication. $1{,}1^x = 2{,}2 \Rightarrow \ln(1{,}1^x) = \ln 2{,}2 \Rightarrow x \ln 1{,}1 = \ln 2{,}2 \Rightarrow x = \frac{\ln 2{,}2}{\ln 1{,}1}$. Attention on ne peut pas simplifier cette expression.

Exercice 2. Non spécialité.

On tire au hasar une carte dans une boite. Sur chaque carte il y a une question, un tiers portant sur le thème cinéma et deux tiers sur le thème musique.

Soit C l'évènement "la question porte sur le thème cinéma" : $p(C)=\frac{1}{3}$.

Soit M l'évènement "la question porte sur le thème musique" : $p(M)=\frac{2}{3}$.

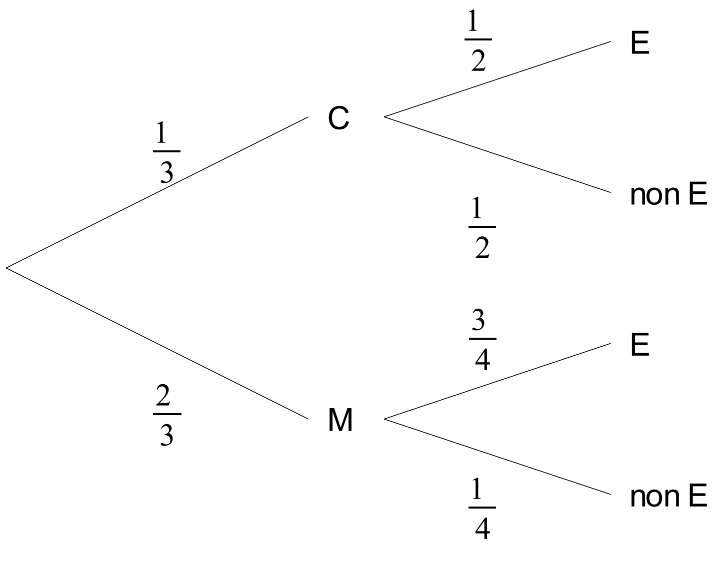
Première partie.

On pose à Pierre une question choisie au hasard. E est l'évènement "Pierre répond correctement à la question". On sait que :

la probabilité que Pierre réponde correctement à une question du thème cinéma est égale à $\frac{1}{2}$ donc $p(E/C)=\frac{1}{2}$,

la probabilité que Pierre réponde correctement à une question du thème musique est égale à $\frac{3}{4}$ donc $p(E/M)=\frac{3}{4}$.

Arbre pondéré représentant l'expérience. ($\bar{E}$ est noté non E.)



1. $p(M\cap E)=p(E/M)\,p(M)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$.

2. $p(E)=p(M\cap E)+p(C\cap E)=\frac{1}{2}+p(E/C)\,p(C)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

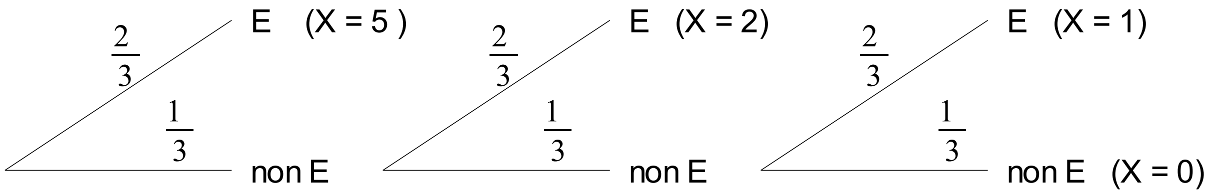
3. $p(C/\overline{E})=\dfrac{p(C\cap\overline{E})}{p(\overline{E})}=\dfrac{p(C\cap\overline{E})}{1-p(E)}=\dfrac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$.

Deuxième partie.

Le jeu se déroule de la manière suivante. On pose trois questions au plus et le jeu s'arrête si Pierre répond correctement à une question.

A chaque fois qu'une question, est tirée on remet dans la boite une question sur le même thème donc les expérience sont indépendantes.
Si Pierre répond correctement à la première question il gagne 5 points, s'il répond correctement à la deuxième question il gagne 2 points, s'il répond correctement à la troisième question il gagne 1 point.
On appelle X le nombre de points.

1. Arbre pondéré.



2 et 3. Loi de probabilité de X et espérance mathématique.

$$p(X=5)=p(E)=\frac{2}{3}.$$

$$p(X=2)=p(\overline{E}\,E)=p(\overline{E})\,p(E)=\frac{2}{9}.$$

$$p(X=1)=p(\overline{E}\,\overline{E}\,E)=\left(p(\overline{E})\right)^2 p(E)=\frac{2}{27}.$$

$$p(X=0)=p(\overline{E}\,\overline{E}\,\overline{E})=\left(p(\overline{E})\right)^3=\frac{1}{27}.$$

X_i	0	1	2	5	Total
p_i	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$	1
$X_i\,p_i$	0	$\frac{2}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{90}{27}$	$E(X)=\frac{104}{27}$

3. Pierre peut espérer marquer $\frac{104}{27}$ points en moyenne.

Exercice 2. Spécialité.

Une population est divisé en "fumeurs" et "non fumeurs". Le taux de fécondité est le même pour ces deux populations donc n'influe pas sur la proportion "fumeurs" "non fumeurs".

Soit f_n le pourcentage de fumeurs de la génération de rang n et $g_n = 1 - f_n$ le pourcentage de non fumeurs.

1. Graphe probabiliste.

2. Pour une génération quelconque de rang n+1 :

60% des descendants de fumeurs, $0{,}6\ f_n$ et 10% des descendants de non fumeurs, $0{,}1\ g_n$, sont des fumeurs donc :

$$f_{n+1} = 0{,}6\ f_n + 0{,}1\ g_n.$$

40% des descendants de fumeurs, $0{,}4\ f_n$ et 90% des descendants de non fumeurs, $0{,}9\ g_n$, sont des non fumeurs donc :

$$g_{n+1} = 0{,}4\ f_n + 0{,}9\ g_n.$$

$$\left| \begin{array}{l} f_{n+1} = 0{,}6\ f_n + 0{,}1\ g_n \\ g_{n+1} = 0{,}4\ f_n + 0{,}9\ g_n \end{array} \right. \text{ implique } \begin{pmatrix} f_{n+1} & g_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

On appelle A la matrice $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

3. Pour la génération 0, $f_0 = g_0 = 0{,}5$. D'après la formule ci-dessus :

$$\begin{pmatrix} f_2 & g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 & g_0 \end{pmatrix} A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}275 & 0{,}725 \end{pmatrix}.$$

La génération de rang 2 sera composée de 27,5 % de fumeurs.

4. L'état probabiliste stable est le vecteur $\begin{pmatrix} f_n & g_n \end{pmatrix}$ pour n grand. (En fait c'est la limite de ce vecteur quand n tend vers l'infini).

$\begin{pmatrix} f_n & g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 & g_0 \end{pmatrix} A^n$ donc on vérifie si A^n converge en calculant A^n pour n grand.

$$A^{64} = A^{65} = \ldots = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Donc l'état probabiliste stable est $\begin{pmatrix} f_{stable} & g_{stable} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 & g_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

Autre méthode. $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ est l'état probabiliste stable signifie que d'une génération à la suivante l'état sera le même donc : $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ avec $x + y = 1$.

On obtient le système : $\left| \begin{array}{l} 0{,}6\ x + 0{,}1\ y = x \\ 0{,}4\ x + 0{,}9\ y = y \\ x + y = 1 \end{array} \right.$ donc $\left| \begin{array}{l} -0{,}4\ x + 0{,}1\ y = 0 \\ 0{,}4\ x - 0{,}1\ y = 0 \\ x + y = 1 \end{array} \right.$ donc $\left| \begin{array}{l} -0{,}4\ x + 0{,}1\ y = 0 \\ 0{,}4\ x + 0{,}4\ y = 0{,}4 \end{array} \right.$

$\left| \begin{array}{l} 0{,}5\ y = 0{,}4 \\ x = 1 - y \end{array} \right.$ donc $\left| \begin{array}{l} y = 0{,}8 \\ x = 0{,}2 \end{array} \right.$

On peut en conclure que la proportion de fumeurs se stabilisera à 20%.

5. D'après la question 2 :

$$f_{n+1} = 0{,}6\ f_n + 0{,}1\ g_n = 0{,}6\ f_n + 0{,}1\ (1 - f_n) = 0{,}5\ f_n + 0{,}1\ .$$

6. On pose pour tout entier naturel n : $u_n = f_n - 0{,}2$

6 a. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{f_{n+1} - 0{,}2}{f_n - 0{,}2} = \dfrac{0{,}5\ f_n + 0{,}1\ - 0{,}2}{f_n - 0{,}2} = \dfrac{0{,}5\ (f_n - 0{,}2\ )}{f_n - 0{,}2} = 0{,}5$ donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $u_0 = f_0 - 0{,}2 = 0{,}3$.

6 b. $u_n = u_0\ q^n = 0{,}3 \times 0{,}5^n$.

6 c. $f_n = u_n + 0{,}2 = 0{,}3 \times 0{,}5^n + 0{,}2$

6 d. (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5.

$$0 < 0{,}5 < 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} u_n = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f_n = 0{,}2\ .$$

On peut en conclure que la proportion de fumeurs se stabilisera à 20%.

Exercice 3.

Soit f_1 et f_2 deux fonctions dérivables sur [0 ; 3], C_1 et C_2 leur courbe représentative.
Soit f la fonction dérivable sur [0 ; 3] définie par $f = f_1 - f_2$.

1. Les courbes C_1 et C_2 se coupent au point A(e-1 ; 1) donc $f(e-1) = 0$ La courbe de f doit couper l'axe (0x) au point d'abscisse e-1. La courbe de la figure 3 ne peut pas être la représentation graphique de f.

2 a. Tableau de signe de f.
D'après les figures 1 et 2 f est positive puis négative sur [0 ; 3].

x	0		e - 1		3
f(x)		+	0	–	

2 b. 2 a. Tableau de signe de f'.
La fonction f est strictement décroissante sur [0 ; 3] donc f' est strictement négative.

x	0		3
f ' (x)		–	

3. F est une primitive de f sur [0 ; 3] donc $F' = f$.
D'après le 2 a. F est strictement croissante sur [0 ; e-1[et strictement décroissante sur]e-1 ; 3] et admet donc un maximum en x = e-1.

4. La courbe de la figure 5 représente une fonction décroissante sur [0 ; 3] donc cette courbe ne convient pas.
La courbe de la figure 6 représente une fonction qui admet un maximum en 2 ≠ e-1 donc cette courbe ne convient pas.

5. La courbe de la figure 4 représente la fonction F. d'après le graphique, F(0) = 0, le maximum est $\frac{e^2-3}{2}$ donc $F(e-1)=\frac{e^2-3}{2}$.

$$\int_0^{e-1} f(x)\,dx = F(e-1)-F(0)=\frac{e^2-3}{2}.$$

6. L'aire du domaine hachuré sur la figure 1 est limité par les droites d'équation x = 0 et x = e-1 et par les courbes C_1 et C_2 de f_1 et f_2. C_1 est au dessus de C_2 sur [0 ; e-1] donc l'aire en u.a. du domaine est :

$$\int_0^{e-1} f_1(x)-f_2(x)\,dx=\int_0^{e-1} f(x)\,dx=\frac{e^2-3}{2}.$$

Exercice 4

Première partie.
Le nombre d'adhérents d'un club sportif est donné dans le tableau ci-dessous :

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003
rang de l'année xi	0	1	2	3	4	5
nombre d'adhérents yi	600	690	794	913	1045	1207

On pose $Y_i = \ln(y_i)$ et l'ajustement affine de Y en x par la méthode des moindres carrés est :

$$Y = 0{,}14\ x + 6{,}397$$

1. Le rang de l'année 2004 est $x_6 = 6$ donc $Y_6 = 0{,}14 \times 6 + 6{,}397$

$$\ln(y_6) = 7{,}237 \Rightarrow y_6 = e^{7{,}237} \simeq 1\,390.$$

On prévoit un effectif de 1 390 adhérents en 2004.

2 a. $Y_i = 0{,}14\ x_i + 6{,}397 \Rightarrow \ln(y_i) = 0{,}14\ x_i + 6{,}397 \Rightarrow y_i = e^{0{,}14\ x_i + 6{,}397} = e^{6{,}397}\ e^{0{,}14\ x}$.
$e^{6{,}397} \simeq 600$ arrondi à l'unité, $e^{0{,}14\ x} = \left(e^{0{,}14}\right)^x$ et $e^{0{,}14} \simeq 1{,}15$ arrondi à 10^{-2} donc :

$$y_i = 600 \times 1{,}15^{x_i}.$$

Autre méthode :
$1{,}15^x = \exp(\ln(1{,}15^x)) = e^{x \ln 1{,}15}$, $\ln 1{,}15 \simeq 0{,}14$ arrondi à 10^{-2} donc $1{,}15^x \simeq e^{0{,}14\ x}$ à 10^{-2} près.

2 b. D'après la formule ci-dessus et sachant que $x_n = n$:
$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{600 \times 1{,}15^{n+1}}{600 \times 1{,}15^n} = 1{,}15$ ou $y_{n+1} = 1{,}15\ y_n$, chaque année le nombre d'adhérents est multipolié par 1,15 donc augmente de 15%.

Deuxième partie.
En fait le nombre d'adhérents en 2004 est de 2400.

On considère la fonction *f* définie sur [0 ; +∞[par :

$$f(x) = \frac{3600}{1 + 0{,}5\ e^{-x}}$$

On suppose que le nombre d'adhérents en 2004+n est égal à $u_n = f(n)$.

1. $\lim_{x \to +\infty} -n = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} e^{-n} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(n) = 3600$

Le nombre d'adhérents va se stabiliser à 3 600.

2 a et b. Nombre moyen d'adhérents M entre 2005 et 2009.

Année	2005	2006	2007	2008	2009		
rang de l'année xi	1	2	3	4	5	Total	moyenne
nombre d'adhérents yi	3041	3372	3513	3567	3588	17080	3416

On remarquera que le tableur ne donne pas le même résultat (3 041 au lieu de 3 040) que l'énoncé.

3 a. Soit *F* la fonction définie sur [0 ; +∞[par :

$$F(x) = 3\ 600\ \ln(e^x + 0{,}5)$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \Rightarrow F'(x) = 3\ 600\ \frac{e^x}{e^x + 0{,}5} = 3\ 600\ \frac{e^x \times 1}{e^x(1 + 0{,}5\ e^{-x})} = 3\ 600\ \frac{1}{1 + 0{,}5\ e^{-x}} = f(x)$$

F est une primitive de *f*.

3 b. Valeur moyenne μ de *f* sur [0,5 ; 5,5].

$$\mu = \frac{1}{5{,}5 - 0{,}5} \int_{0{,}5}^{5{,}5} f(x)\,dx = \frac{1}{5}\left(F(5{,}5) - F(0{,}5)\right) = \frac{3600}{5}\left(\ln(e^{5{,}5} + 0{,}5) - \ln(e^{0{,}5} + 0{,}5)\right) \simeq 3\ 411$$

$$\mu \simeq M$$