Corrigé du baccalauréat juin 2005, France métropolitaine.

Exercice I

1 La droite d'équation $y = 4$ est une asymptote à la courbe (C) en $+\infty$ donc :

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-4) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$$

2 f est dérivable sur] -3 ; +∞ [et admet un minimum en x = 0 donc $f'(0) = 0$.

3 A est le point d'abscisse 0, d'après la question 2 la tangente en A est "horizontale". L'ordonnée de A est 1 donc l'équation de la tangente en A est $y = 1$.

4 Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = x$, on trace la droite d'équation $y = x$. Cette droite a un seul point d'intersection B avec la courbe, l'abscisse de B est comprise entre 1 est 2. L'équation admet une solution unique appartenant à]1 ; 2[.

La fonction g est définie sur] -3 ; +∞ [par $g = \ln \circ f$

5 $g(0) = \ln \circ f(0) = \ln(f(0)) = \ln 1 = 0$

6 Rappel : ln est strictement croissante donc elle conserve l'ordre.

$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2.$$

ln ne change donc pas le sens de variation de f. f et g ont les mêmes variations.

Autre méthode : g est dérivable. $f > 0$ sur $]-3\ ;+\infty[$ et $g' = \frac{f'}{f}$. g' et f' sont de même signe.

f et g ont les mêmes variations.

Exercice 2. Non spé.

Le tableau ci-dessous indique le montant du rachat d'un trimestre de cotisation en fonction de l'âge, 54 + x_i années, de l'adhérent.

Rang x_i	0	1	2	3	4
Montant y_i	2 229	2 285	2 340	2 394	2 449

1 Un salarié de 54 ans paye 2 229 euros et un salarié de 58 ans paye 2 449 euros donc le taux d'augmentation de la cotisation est d'environ 10% :

$$t = \frac{2\,449 - 2\,229}{2\,229} \times 100 \simeq 9{,}87$$

2 Voir le graphique.

3 Une équation de la droite de régression (D) de y en x est : $y = 54{,}9\,x + 2\,229{,}6$

4 D'après l'ajustement affine le rachat d'un semestre pour un salarié âgé de 60 ans coûte 2 559 euros. $54{,}9 \times 6 + 2\,229{,}6 = 2\,559$

5 En fait ce montant est de 2 555 euros. A partir de 60 ans, il baisse chaque année de 3% donc il est multiplié par 0,97. A 65 ans le coût sera : $2\,555 \times 0{,}97^5 \simeq 2\,194{,}07$ *euros.*

Exercice 2. Spé.

Partie A. Etude théorique.

u_n est le nombre d'habitant de la ville au 1er janvier 2005 et $u_0 = 100\,000$.

1 $u_1 = u_0 + \frac{5}{100} u_0 + 4\,000 = 1{,}05 \times 100\,000 + 4\,000 = 109\,000$

$u_2 = 1{,}05 \times 109\,000 + 4\,000 = 118\,450$

2 L'augmentation naturelle est de 5% par an donc la population est multipliée chaque année par $\left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1{,}05$

4 000 immigrants viennent s'installer chaque année donc : $u_{n+1} = 1{,}05\ u_n + 4\,000$

3 Pour tout n on pose $v_n = u_n + 80\,000$

a $v_0 = 100\,000 + 80\,000 = 180\,000$

b $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} + 80\,000}{u_n + 80\,000} = \frac{1{,}05\ u_n + 84\,000}{u_n} = \frac{1{,}05\ (u_n + 80\,000)}{u_n} = 1{,}05$

Donc v_n est une suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme $v_0 = 180\,000$.

c $v_n = 180\,000 \times 1{,}05^n \Rightarrow u_n = v_n - 80\,000 = 180\,000 \times 1{,}05^n - 80\,000$

d (v_n) est une suite géométrique de raison 1,05 > 1 et de premier terme positif donc sa limite est $+\infty$ et donc la limite de (u_n) est $+\infty$.

Partie B.

1 L'année 2020 correspond à n = 15 donc la population sera :

$$u_{15} = 180\,000 \times 1{,}05^{15} - 80\,000 = 294\,207$$

2 Si la population est de 200 000 habitants alors : $u_n = 200\,000$

$$200\,000 = 180\,000 \times 1{,}05^n - 80\,000 \Rightarrow 280 = 180 \times 1{,}05^n \Rightarrow \ln 280 = \ln 180 + \ln 1{,}05^n$$

$$\ln \frac{280}{180} = n \ln 1{,}05 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln \frac{14}{9}}{\ln 1{,}05} \simeq 9{,}06$$

A partir de la 10eme année, en 2015, la population aura dépassé 200 000 habitants.

Exercice 3.

Soit f la fonction définie sur [0 ; +∞[par : $f(x)=x-2+10\ e^{-0,5\ x}$.
(C) est sa courbe représentative et (D) la droite d'équation $y = x - 2$.

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0,5x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x-2=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2 $\alpha=2\ \ln 5$

$$f(\alpha)=2\ \ln 5-2+10\ e^{-0,5\times 2\ \ln 5}=2\ \ln 5-2+10\ e^{-\ln 5}=2\ \ln 5-2+10\ e^{\ln\frac{1}{5}}=2\ \ln 5-2+\frac{10\times 1}{5}$$

$f(\alpha)=2\ \ln 5=\alpha$.

$\alpha\simeq 3,2$ à 10^{-1} près.

3 a $f'(x)=1+10\times -0,5\ e^{-0,5\ x}=1-5\ e^{-0,5\ x}$.

b Signe de $f'(x)$.

$$1-5\ e^{-0,5\ x}>0 \Rightarrow 1<5\ e^{-0,5\ x} \Rightarrow \frac{1}{5}<e^{-0,5\ x} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{5}\right)<-0,5\ x \Rightarrow -\ln 5<-0,5\ x$$

$2\ \ln 5<x$ donc $x>\alpha$

Tableau de variations. α est noté a.

x	0		a		+∞
f '(x)		−	0	+	
f(x)	8	↘	a	↗	+∞

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} -0,5\ x=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0,5\ x}=\lim\limits_{t\to-\infty} e^{t}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=\lim\limits_{x\to+\infty} 10\ e^{-0,5\ x}=0$

Une exponentielle est toujours positive donc $f(x)-(x-2)=10\ e^{-0,5\ x}>0$
(D) est une asymptote à la courbe (C) en +∞ et la courbe (C) est au dessus de la droite (D).

5 La courbe (C) est au dessus de la droite (D) donc l'aire en unités d'aire du domaine limité par les droites d'équation $x = 2$ et $x = 6$ et par les courbes (C) et (D) est égal à l'intégrale :

$$A=\int_2^6 f(x)-(x-2)\,dx=\int_2^6 10\ e^{-0,5\ x}\,dx=10\left[\frac{e^{-0,5\ x}}{-0,5}\right]_2^6=-20\left(e^{-3}-e^{-1}\right)$$

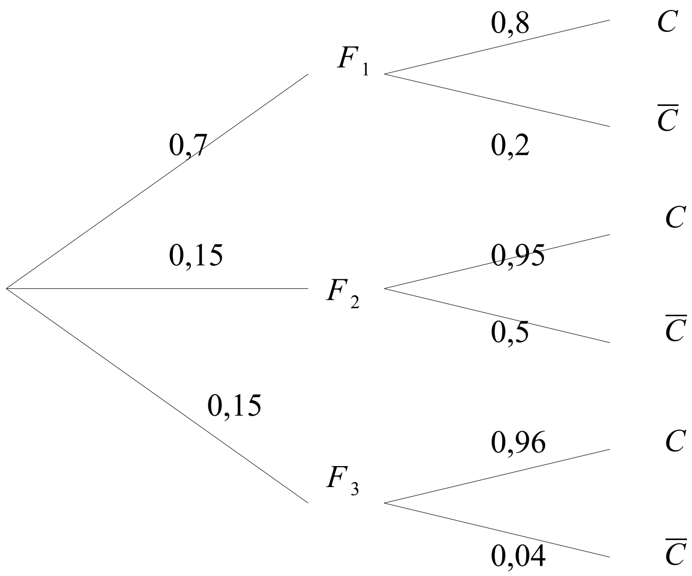
$$A=20\left(\frac{e^2-1}{e^3}\right)\ \text{u.a.} \qquad A\simeq 6,36\ \text{u.a.}$$

Exercice 4.

1 *Fi* est l'évènement "la pomme provient du producteur numéro *i*". Il y a 3 producteurs et le premier fournit 70% des pommes. Les deux autres se partage le reste de ce marché donc :

$$p(F_2)=p(F_3)=15\%.$$

2 *C* est l'évènement "la pomme est du bon calibre". 20% des pommes du premier producteur sont hors calibre, 5% du second et 4% du troisième donc on obtient l'arbre pondéré suivant :



3 Probabilité que la pomme soit du bon calibre et provienne du premier producteur.

$$p(F_3\cap C)=P(C/F_3)\,p(F_3)=0{,}96\times 0{,}15=0{,}1440$$

4 Probabilité que la pomme soit du bon calibre.

$$p(C)=p(F_1\cap C)+p(F_2\cap C)+p(F_3\cap C)=0{,}8\times 0{,}7+0{,}15\times 0{,}5+0{,}144=0{,}8465.$$

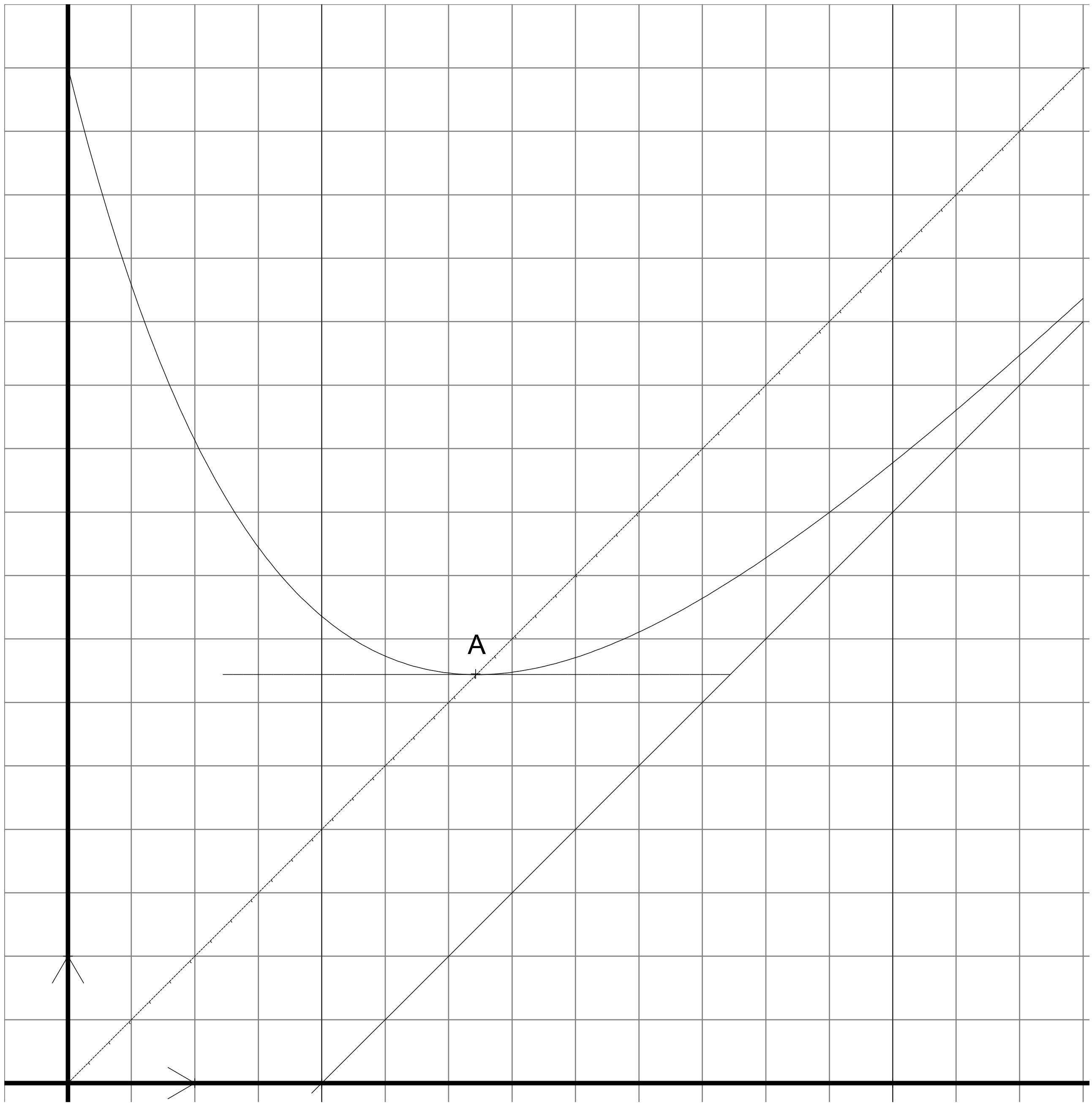
5 La pomme mesurée est hors calibre.
Le premier producteur fournit 70% des pommes et un pourcentage important, 20%, de pomme sont hors calibre par rapport aux autres producteurs, 5% et 4%. La pomme a donc une grande probabilité de provenir du premier producteur. Justifions cette affirmation par un calcul.

On sait que la pomme n'est pas du bon calibre, on va calculer la probabilité que la pomme provienne du premier producteur sachant qu'elle n'est pas du bon calibre.

$$p(F_1/\overline{C})=\frac{p(F_1\cap\overline{C})}{p(\overline{C})}=\frac{0{,}2\times 0{,}7}{1-0{,}8465}\simeq 0{,}9121.$$

La pomme a donc une probabilité de 91,21% de provenir du premier producteur.

Annexe 2.



A est le point de coordonnées $(\alpha\,;\alpha)$. C'est le point d'intersection de la courbe et de la droite d'équation y = x.