Exercice n° 1.

Voici les superficies en milliers d'hectares du patrimoine cumulé du conservatoire du littoral :

Années	1976	1981	1986	1991	1996	2001
xi	1	2	3	4	5	6
yi en milliers d'hectares	2	16	28	38	50	65

1 Entre les années 1991 et 2001 le patrimoine a augmenté de 27 (milliers d'hectares).
Le taux d'augmentation pour cette période est donc : $t=\frac{27}{38}\times 100 \simeq 71{,}05$.
Le patrimoine a augmenté de 71% à l'unité près.

2 Voir le graphique.

3 a La droite de régression linéaire D de y en x par la méthode des moindres carré est :

$$y=12{,}2\ x-9{,}5 \quad \text{à } 10^{-1} \text{ près.}$$

b Voir graphique.

4 L'année 2006 correspond au rang $x_7=7$ donc peut estimer que :

$$y_7=12{,}2\times 7-9{,}5=75{,}9$$

En 2006 on peut prévoir un patrimoine de 75 900 hectares.

5 a Si le patrimoine est de 200 milliers d'hectares alors :

$$y=200 \Rightarrow 200=12{,}2\ x-9{,}5 \Rightarrow \frac{209{,}5}{12{,}2}=x \Rightarrow x\simeq 17{,}17$$

Une augmentation du rang de 1 correspond à une augmentation de 5 ans. Le rang commence à 1 donc $x\simeq 17{,}17$ correspond à une augmentation 16,17 du rang donc a une augmentation de $16{,}17\times 5\simeq 80{,}85$ années.
Donc en 2057 (1976 + 81) le patrimoine aura dépassé 200 000 hectares.

Autre façon de raisonner, en notant a_i l'année : $x_i=\frac{a_i-1976}{5}+1$

$$17{,}17=\frac{a_i-1976}{5}+1 \Rightarrow 5\times 16{,}7=a_i-1976 \Rightarrow 80{,}85+1976=a_i .$$

Nuage de points et droite de régression linéaire.

Exercice n° 2 Non spécialité mathématique.

Une auto-école propose deux filière pour préparer le permis, la filière AAC et la filière traditionnelle.

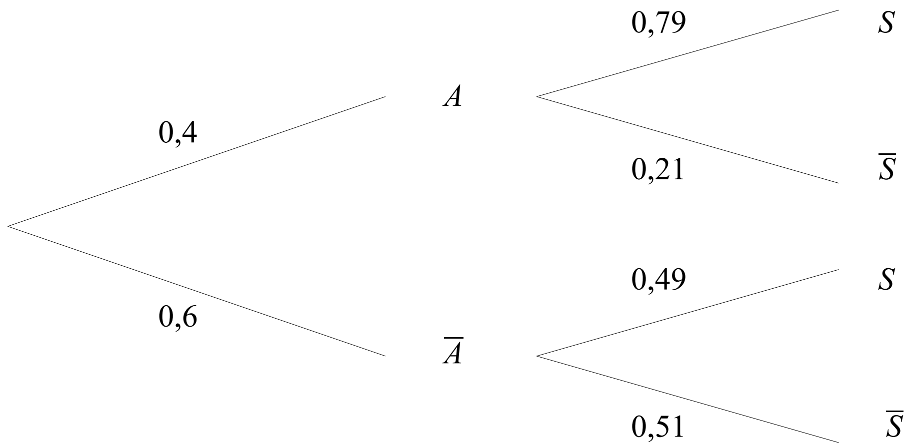
On note A l'évènement "le candidat a choisi la filière AAC". 40% des candidats choisissent cette filière donc $p(A)=0{,}4$ et $p(\overline{A})=0{,}6$.

On note S l'évènement "le candidat a obtenu le permis lors de la première présentation".

Un candidat ayant choisi la filière AAC obtient dans 79% des cas le permis lors de la première présentation donc $p(S/A)=p_A(S)=0{,}79$.

Un candidat ayant choisi la filière traditionnelle obtient dans 49% des cas le permis lors de la première présentation donc $p(S/\overline{A})=p_{\overline{A}}(S)=0{,}49$.

1 Arbre pondéré.



2 a $p(S\cap A)=p(A/S)\,p(A)=0{,}4\times 0{,}79=0{,}316$
La probabilité qu'un candidat ait obtenu le permis lors de la première présentation et ait choisi la filière AAC est 0,316.

2 b $p(S)=p(S\cap A)+p(S\cap \overline{A})=0{,}316+0{,}49\times 0{,}6=0{,}61$.
La probabilité qu'un candidat ait obtenu le permis lors de la première présentation est 0,61.

3 $p(A/\overline{S})=\dfrac{p(A\cap\overline{S})}{p(\overline{S})}=\dfrac{p(A\cap\overline{S})}{1-p(S)}=\dfrac{0{,}4\times 0{,}21}{0{,}39}\simeq 0{,}21\,238$.
La probabilité qu'un candidat qui a échoué ait choisi la filière AAC est 0,21 238.

4 On interroge au hasard et de façon indépendante trois candidats donc on est dans le schéma de Bernoulli.
L'évènement contraire de l'évènement "au moins un candidat a échoué", noté E, est $\overline{E}$ "les trois candidats on réussi".

$$p(E)=1-p(\overline{E})=1-p(S)^3=1-0{,}61^3\simeq 0{,}77\,302.$$

5 L'auto-école pratique les prix suivants :
1 200 € pour la filière AAC
1 050 € pour la filière traditionnelle
Il y a 200 inscrits dont 40% dans la filière AAC donc le chiffre d'affaires sera :

$$1\,200\times 200\times 0{,}4+1\,050\times 200\times 0{,}6=222\,000\ €.$$

Exercice 3

Question 1. $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc la courbe admet $y=0$ comme asymptote.

Question 2. La fonction ln est croissante] 0 ; +∞ [donc :

$$\ln(2x+1) \geq \ln(x+3) \Rightarrow 2x+1 \geq x+3 \Rightarrow x \geq 2.$$

Question 3. Pour tout x réel $g'(x)=f(x)$ donc g est une primitive de f .

Question 4. On teste les solutions proposées, mais il est sûr que la solution comporte des logarithmes. On trouve $S=\{0 ; \ln\frac{1}{2}\}$.

Si on remplace e^x par y sachant que $e^{2x}=(e^x)^2=y^2$ et résout l'équation en y :

$$\Delta=1, \ y_1=1, \ y_2=\frac{1}{2} \Rightarrow x_1=\ln 1=0, \ x_2=\ln\frac{1}{2}.$$

Question 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n}=+\infty$. "L'exponentielle l'emporte sur les puissances".

Question 6. On trace la fonction et les droites proposée. La droite d'équation $y=-x+2$ est la tangente au point d'abscisse 1.

Si on calcule : $f'(x)=\frac{2}{x}-3, \ f'(1)=-1, \ f(1)=1 \Rightarrow y=-1(x-1)+1.$

Question 7. La valeur moyenne sur [1 ; 3] est :

$$\frac{1}{2}\int_1^3 x^2+2x\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}+x^2\right]_1^3=\frac{1}{2}\left(\frac{3^3}{3}+3^2-\frac{1}{3}-1\right)=\frac{1}{2}\times\frac{50}{3}=\frac{25}{3}.$$

Question 8. On trace la courbe et on ne voit pas si 0 appartient au domaine ou pas.

$e^{\ln x}$ existe si $\ln x$ existe donc sur $]0 ; +\infty[$.

Exercice n° 4

Soit f la fonction d'offre en milliers de consoles en fonction du prix unitaire x en centaines d'euros définie sur]0 ; 6] par :

$$f(x)=0,7\ e^{0,5x+2}$$

Soit g la fonction de demande en milliers de consoles en fonction du prix unitaire x en centaines d'euros définie sur]0 ; 6] par :

$$g(x)=10\ \ln\left(\frac{20}{x}\right).$$

1 a La fonction affine $x \to 0{,}5\ x+2$ est croissante et la fonction exponentielle aussi, 0,7 est positif donc f est croissante donc sa courbe est celle qui croît de 5 à 105 sur [0 ; 6]. L'autre courbe est celle de g .

On peut aussi dire que $g(x)=10\ \ln\left(\frac{20}{x}\right)=10\ (\ln 20-\ln x)$. La fonction logarithme est croissante et 10 est positif donc g est décroissante.

1 b Le point A est l'intersection des courbes de demande et d'offre donc c'est le point d'équilibre (La réponse est dans la question 2 d) ses coordonnées sont environ (2,7 ; 20) (la réponse est dans la question 3).

2 Soit la fonction h définie sur]0 ; 6] par $h=f-g$.

a Fonction dérivée de h :

$$h'(x)=0{,}7\ (e^{0{,}5\ x+2})'-10\ (\ln 20-\ln x)'=0{,}7\ (0{,}5\ e^{0{,}5\ x+2})-10\ -\frac{1}{x}=0{,}35\ e^{0{,}5\ x+2}+\frac{10}{x}.$$

b On travaille sur]0 ; 6] donc $\frac{10}{x}>0$. L'exponentielle est toujours strictement positive donc h' est strictement positive et h est strictement croissante.

c On ne peut pas résoudre l'équation $h(x)=0$. On emploie le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle [2 ; 3].

g est strictement croissante et continue sur [2 ; 3], $g(2)<0$ et $g(3)>0$ donc 0 appartient à l'intervalle $[g(2);g(3)]$ et l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique x_0 sur [2 ; 3].

D'après la calculatrice $x_0 \simeq 2{,}7$ à 10^{-1} près.

d Le prix unitaire d'équilibre de cette console est d'environ 270 € et le nombre de consoles disponibles à ce prix est d'environ 20 000 (le résultat varie entre 19 952 et 20 025 selon la fonction choisie).

3 a Une primitive de e^{ax+b} est $\frac{1}{a}e^{ax+b}$

F définie par $F(x)=\frac{0{,}7}{0{,}5}\ e^{0{,}5\ x+2}=1{,}4\ e^{0{,}5\ x+2}$ est une primitive de f sur] 0 ; 6].

b On appelle surplus des fournisseurs le nombre $S=x_0\ y_0-\int_0^{x_0} f(x)dx$.

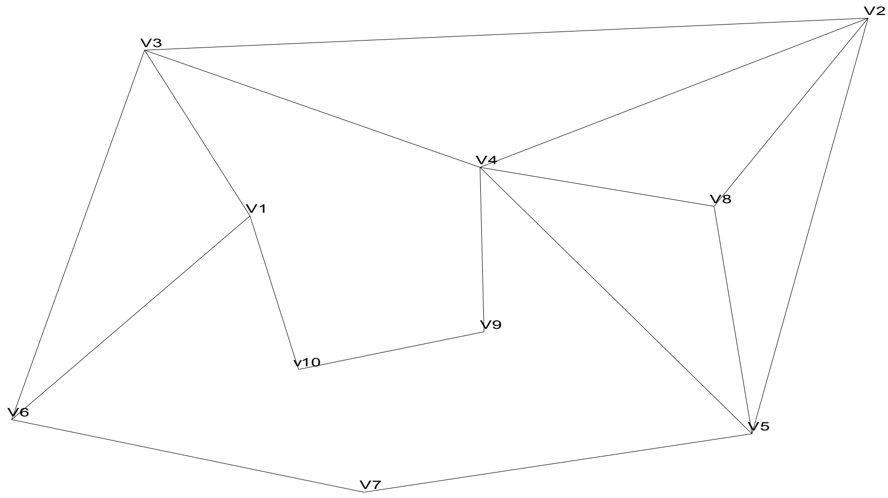
S est de la partie supérieure limitée par la courbe de f du rectangle de diagonale [OA].

$$S=x_0\ y_0-\int_0^{x_0} f(x)dx=2{,}7\times 20-1{,}4\ \left[e^{0{,}5\ x+2}\right]_0^{2{,}7}=54-1{,}4\ (e^{3{,}35}-e^{2}).$$

On termine en apothéose avec une intégrale indéfinie !!!!!

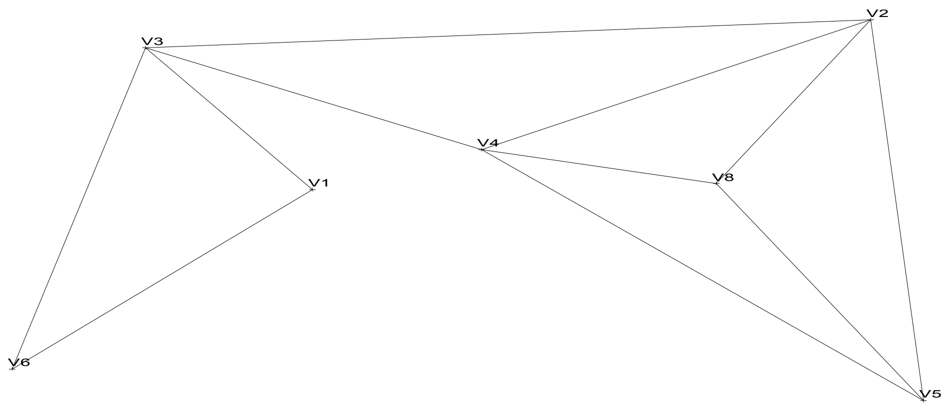
Exercice n° 2. Spécialité mathématique.

1 On représente la situation par un graphe G de 10 sommets correspondants aux 10 variétés de fleurs où chaque arête relie deux sommets correspondant à deux variétés de fleurs incompatibles.

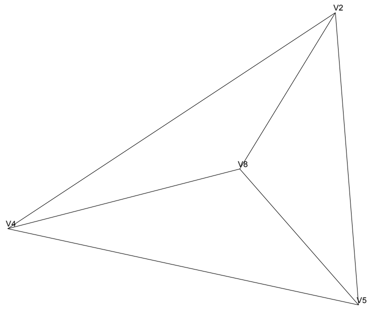


Il est évident que le graphe représenté par chaque candidat peut-être visuellement très différent de celui-ci. J'ai déplacé les sommets afin d'obtenir un graphe où le nombre d'arêtes sécantes soit minimum. Ici le graphe est planaire, c'est à dire qu'aucune arête n'est sécante avec une autre, donc le théorème des quatre couleurs permet d'affirmer que le nombre chromatique est inférieur (ou égal) à 4. Mais ce résultat est tout à fait hors programme.

2 a Il existe un sous-graphe complet d'ordre 4, K_4 , le sous-graphe $V_2 V_4 V_5 V_8$. Pour trouver ce graphe où tous les sommets sont de degré trois on commence par éliminer les sommets de degré strictement inférieur à 3, donc $V_{7,}$ V_9 et V_{10} et on obtient ce sous-graphe :



On réitère le procédé sur ce dernier graphe en supprimant les sommets de degré égal ou inférieur à 2 et ainsi de suite. On obtient ce graphe :



2 b Il existe un sous-graphe complet d'ordre 4 donc le nombre chromatique est supérieur ou égal à 4, $C \geq 4$.

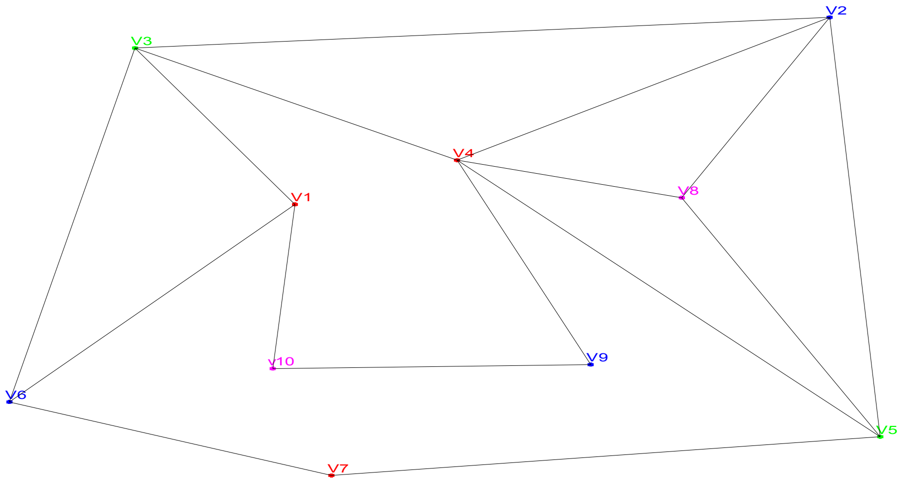
3 a Classement des sommets par degré décroissant.

V_4	V_2	V_3	V_5	V_1	V_6	V_8	V_7	V_9	V_{10}
5	4	4	4	3	3	3	2	2	2

Il y a bien sûr d'autres classements.

3 b Le plus haut degré est 5 donc $C \leq 6$ et donc $4 \leq C \leq 6$.

4 a On commence par colorier V_4 qui a le plus haut degré puis avec la même couleur un sommet non adjacent à V_4 ... (par exemple en barrant V_4 et tous les sommets adjacents à V_4 puis en coloriant le premier sommet non barré de la liste c'est à dire V_6 et on réitère le procédé jusqu'à ce que tous les sommets soit barrés. On change de couleur et on réitère le procédé avec les sommets non coloriés).



Bien sûr il existe d'autres coloriages du graphe avec 4 couleurs.

b On a colorié le graphe avec quatre couleurs donc $C \leq 4$. Comme $C \geq 4$ on peut en déduire que le nombre chromatique est 4.

c On peut donc construire quatre parterres le premier avec des les fleurs V_1, V_4 et V_7 , un deuxième avec les fleurs V_2, V_6 et V_9 , un troisième avec les fleurs V_5 et V_3 et le dernier avec les fleurs V_8 et V_{10} .