Donné le lundi, 17 octobre, ou avant, et à rendre avant les vacances de la Toussaint.

Devoir maison n° 2.

Petit à petit l'oiseau fait son nid (proverbe français).
Ainsi vous devez travaillez.

Ce devoir porte sur l'utilisation des approximations affines, l'utilisation de la dérivée d'une fonction composée et l'étude d'une fonction inconnue.

Approximation affine.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si $a \in I$ et $(a+h) \in I$ et si h est petit (proche de zéro) alors $f(a+h) \approx f(a) + h\,f\,'(a)$
Graphiquement on lit l'ordonnée du point de la tangente en $A(a,f(a))$ au lieu du point de la courbe.

Dérivée d'une fonction composée.

Soit f, g et u des fonctions.
Fonction composée : fog (on lit f rond g).
$fog(x) = f(g(x))$ (il y a des conditions d'existence que nous n'évoquerons pas ici).
Pour calculer la fonction dérivée on écrit plutôt $fou(x) = f(u(x))$.
Formule : $(fou(x))'=(f(u(x))'= u'(x)\,f\,'(u(x))$ ou encore $(f(u))'= u'\,f\,'(u)$
Si on regarde le formulaire des fonctions dérivées on y trouve de nombreux exemples.
$(u^n)' = u'\,n\,u^{n-1}$ $()' = u'$ $(\ )' = u'(\ )$ ...

Problème.

On veut étudier une fonction f définie et dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.
On sait que $f\,'(x) =$ et que $f(1) = 0$.

I Variations de *f*.

Déterminer le signe de $f\,'(x)$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ et établir le tableau de variation de f.

II Approximation affine de *f(2)*.

1 Première approximation.
$f(a+h) \approx f(a) + h\,f\,'(a)$ avec $a = 1$ et $h = 1$
Déterminer la valeur approchée de $f(2)$.

2 Deuxième approximation de $f(2)$ en deux étapes.

a On approxime $f(1{,}5)$ en prenant $a = 1$ et $h = 0{,}5$.
Déterminer la valeur approchée de $f(1{,}5) = \alpha$

b On se sert de α pour approximer $f(2)$.
On prend $a=1{,}5$ et $h=0{,}5$ puis on remplace $f(1{,}5)$ par α.
Déterminer la valeur approchée de $f(2)$.

Il est évident que dans ces deux cas h est grand et que les approximations sont mauvaises.
On pourrait calculer $f(2)$ en 10 étapes en prenant $h=0{,}1$ ou 100 étapes en prenant $h=0{,}01$. Mais c'est un travail long et fastidieux à moins de se servir d'un tableur, Open Office calc (programme gratuit et performant fonctionnant sous Windows, Linux ou système Apple), Works ou Excell. Je vous conseille vivement de faire un tel programme et vous fournirai toute l'aide nécessaire

III Propriété fondamentale de la fonction f.

1 Soit g la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $g(x) = f(2x)$.
Calculer la fonction dérivée de g. Que remarquez vous ?

2 Soit h la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $h(x) = f(3x)$.
Calculer la fonction dérivée de h. Que remarquez vous ?

3 Soit k la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $k(x) = f(ax)$ où a est une constante.
Calculer la fonction dérivée de k. Que remarquez vous ?

4 Calculer la dérivée de la fonction $l=(f-k)$ et établir le tableau de variation de l.

5 Calculer $l(1)$ en fonction de $f(a)$. En déduire la relation entre $f(ax)$, $f(a)$ et $f(x)$.

IV Nouvelle approximation de $f(2)$.

1 En vous servant de la relation fondamentale de f justifier les égalités suivantes :
$f(a^2) = 2f(a)$ $\quad$ $f(a^3) = 3f(a)$ $\quad$ $f(a^4) = 4f(a)$
En déduire la valeur de $f(a^n)$ en fonction de $f(a)$ et de n.

2 Soit β la racine dixième de 2 ($\beta^{10} = 2$). Calculer une valeur approchée de $f(\beta)$ à l'aide d'une approximation affine. On prendra $a=1$ et $h = \beta-1$, on écrira la formule avec β, on effectuera le calcul sur la calculatrice et on donnera la réponse à 10^{-4} prés.

3 En vous servant de la valeur de $f(\beta^{10})$ en fonction de $f(\beta)$, déterminer une valeur approchée de $f(2)$ à 10^{-3} prés.