Suites adjacentes.

I Soit $x \in \mathbb{R}$, $(u_n(x))$ est la suite définie par $u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ Le but de démontrer que cette suite est croissante à partir d'un rang n_0.

1 Démontrer par récurrence que pour tout a, $a > -1$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

2 Démontrer que $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$

3 En déduire les égalités :

$$1 + \frac{x}{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)n(n+1)}\right)$$

$$\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1 - \frac{x}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)n(n+1)}\right)^{n+1}$$

4 En vous servant des résultats des questions 1 et 3 démontrer que pour $n > |x|$:

$$\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \geqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1 - \frac{x}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)n}\right)$$

5 Démontrer l'égalité :

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)n}\right) = 1$$

6 En vous servant des résultats des questions 4 et 5 démontrer que pour $n > |x|$:

$$\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \geqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n}$$

7 En déduire que la suite $(u_n(x))$ est croissante à partir du rang $n_0 = E(|x|) + 1$, E étant la fonction partie entière.

II Soit $x \in \mathbb{R}$, $(v_n(x))$ est la suite définie par $v_n(x) = \dfrac{1}{u_n(-x)} = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{-n}$ Le but de démontrer que cette suite est décroissante.

1 Démontrer que pour tout $n \geqslant n_0$ $u_n(x) > 0$ et $v_n(x) > 0$

2 Déduire du I que la suite $(v_n(x))$ est décroissante à partir du rang n_0 .

III Soit $x \in \mathbb{R}$, le but est de démontrer que pour $n \geqslant n_0$ $u_n(x) \leqslant v_n(x)$ et que $\lim u_n(x) - v_n(x) = 0$

1 En vous servant du résultat de la question I 1, démontrer pour $n \geqslant n_0$ l'inégalité :

$$1 - \frac{x^2}{n} \leqslant \frac{u_n(x)}{v_n(x)} \leqslant 1$$

2 En déduire que $u_n(x) \leqslant v_n(x)$ pour $n \geqslant n_0$ et que ces deux suites convergent.

3 En vous servant du résultat précédent, démontrer que $\left(v_n(x)\right)\dfrac{x^2}{n}$ converge vers 0

4 Déduire du résultat de la question III 1, l'inégalité :

$$0 \leqslant v_n(x) - u_n(x) \leqslant \left(v_n(x)\right)\frac{x^2}{n}$$

5 Démontrer que les suites sont adjacentes.
La limite commune est notée exp(x).

6 Donnez une valeur approchée au millième de exp(1).