Exercices d'arithmétique (manuel Math'x) pour les spécialistes en mathématique.

n° 103. Démontrer que la somme $\overline{xyz}+\overline{yzx}+\overline{zxy}$ de ces 3 nombres de trois chiffres écrits en base 10 est divisible par 111.
Peut-on généraliser ? Si les nombres sont écrits en base *b*, la somme est-elle divisible par $\overline{111}_b$?

Corrigé. Dans une base quelconque *b*, $\overline{111}_b = b^2+b+1$.
$\overline{xyz}+\overline{yzx}+\overline{zxy}=(x+y+z)b^2+(y+z+x)b+(x+y+z)=(x+y+z)(b^2+b+1)$

n° 104. Trouver tous les nombres *n* de trois chiffres tels que la moyenne des nombres obtenus en permutant les chiffres soit égal à *n*.

Corrigé. Il y a 3! nombres en permutant les chiffres de $n=\overline{xyz}$. Certains peuvent être égaux si les chiffres ne sont pas distincts deux à deux mais cela ne change pas le problème.
Il est évident que chaque chiffre apparaît deux fois à chaque rang (vous pouvez vérifier si vous en doutez) donc la moyenne est $m=\frac{1}{6}222\ (x+y+z)=37\ (x+y+z)$ (même calcul qu'au n° 103)
n est égal à la moyenne : $37(x+y+z)=n$ donc *n* est divisible par 37 et par la somme de ses chiffres (cela rappelle la règle de divisibilité par 3 ou 9, on va donc tester les nombres modulo 3) et il a trois chiffres.

Premier cas : $n=3\ q\times 37=111\ q$ convient pour $1\leqslant q\leqslant 9$

Deuxième cas : $n=37(3\ q+1)=111\ q+37$ avec $1\leqslant q\leqslant 8$ (*n* a trois chiffres)
Si *q* = 1 ou 2 il n'y a pas de retenu donc les chiffres sont *q*, *q*+3 et *q*+7 la moyenne est
$m=37(3\ q+10)=111q+370>n.$ Donc ne convient pas.
Si $3\geqslant q\geqslant 5$ il y a une retenu donc les chiffres sont *q*, *q*+4 et *q*+7-10 la moyenne est
$m=37(3\ q+1)=111q+37=n.$ Donc convient.
Si $6\geqslant q\geqslant 8$ il y a deux retenus donc les chiffres sont *q*+1, *q*+4-10 et *q*+7-10 la moyenne est
$m=37(3\ q-8)=111q-8\times 37<n.$ Donc ne convient pas.

Troisième cas : $n=37(3\ q+2)=111\ q+74$ avec $1\leqslant q\leqslant 8$ (*n* a trois chiffres)
Si *q* = 1 ou 2 il n'y a pas de retenu donc les chiffres sont *q*, *q*+7 et *q*+4 la moyenne est
$m=37(3\ q+11)=111q+407>n.$ Donc ne convient pas.
Si $3\geqslant q\geqslant 5$ il y a une retenu donc les chiffres sont *q*+1, *q*+7-10 et *q*+4 la moyenne est
$m=37(3\ q+2)=111q+74=n.$ Donc convient.
Si $6\geqslant q\geqslant 8$ il y a deux retenus donc les chiffres sont *q*+1, *q*+8-10 et *q*+4-10 la moyenne est
$m=37(3\ q-7)=111q-7\times 37<n.$ Donc ne convient pas.

Donc les solutions sont 111, 222, 333, 370, 407, 444, 481, 518, 555, 592, 629, 666, 777, 888, 999.

Voici la solution proposé par Richard André-Jeannin (Forum Les Mathématiques)

Plus simple et plus élégante.

37(a+b+c)=100a+10b+c, soit encore: 7a=3b+4c. Modulo quelques remarques (par exemple si deux des nombres sont égaux, les trois sont égaux), il me semble qu'on doit s'en sortir à peu de frais.

7a=3b+4c. En regardant modulo 7, on voit que b=c (mod 7).
Donc b=c+7 ou b = c-7 (je mets de côté le cas b=c, qui entraîne a=b=c).

Si b=c+7, on a : a=c+3
Si c=0, alors a=3 et b= 7 (370)
Si c=1, alors a= 4 et b=8 (481)
Si c=2, alors a=5 et b= 9 (592)

Si b= c-7, on a : a= c-3
Si c=7, alors a=4 et b=0 (407)
Si c=8, alors a= 5 et b= 1 (518)
Si c=9, alors a=6 et b= 2 (629).

Voir ci-dessous la vérification sur un tableur libre et gratuit.

Soit n un nombre de trois chiffres. La moyenne des nombres obtenus en permutant les chiffres est égal à n

n	chiffres			les permutés de n						moyenne	Solutions
111	1	1	1	111	111	111	111	111	111	111	111
148	1	4	8	148	184	418	481	814	841	481	Pas solution
185	1	8	5	185	158	815	851	518	581	518	Pas solution
222	2	2	2	222	222	222	222	222	222	222	222
259	2	5	9	259	295	529	592	925	952	592	Pas solution
296	2	9	6	296	269	926	962	629	692	629	Pas solution
333	3	3	3	333	333	333	333	333	333	333	333
370	3	7	0	370	307	730	703	37	73	370	370
407	4	0	7	407	470	47	74	740	704	407	407
444	4	4	4	444	444	444	444	444	444	444	444
481	4	8	1	481	418	841	814	148	184	481	481
518	5	1	8	518	581	158	185	851	815	518	518
555	5	5	5	555	555	555	555	555	555	555	555
592	5	9	2	592	529	952	925	259	295	592	592
629	6	2	9	629	692	269	296	962	926	629	629
666	6	6	6	666	666	666	666	666	666	666	666
703	7	0	3	703	730	73	37	370	307	370	Pas solution
740	7	4	0	740	704	470	407	74	47	407	Pas solution
777	7	7	7	777	777	777	777	777	777	777	777
814	8	1	4	814	841	184	148	481	418	481	Pas solution
851	8	5	1	851	815	581	518	185	158	518	Pas solution
888	8	8	8	888	888	888	888	888	888	888	888
925	9	2	5	925	952	295	259	592	529	592	Pas solution
962	9	6	2	962	926	692	629	296	269	629	Pas solution
999	9	9	9	999	999	999	999	999	999	999	999

n° 105. *n* est un nombre de deux chiffres dans la base *b*. La différence entre *n* et le nombre obtenu en permutant les chiffres est $\overline{12}_b$. Quelle est la base *b* ?

Corrigé. $n=\overline{xy}$. $\overline{xy}-\overline{yx}=\overline{12} \Rightarrow xb+y-(yb+x)=b+2 \Rightarrow (x-y)b-(x-y)=b+2$.
x et *y* sont des chiffres inférieurs à b et $x>y$ (sinon le résultat serait ou négatif si $x<y$ ou un nombre à un chiffre si $x=y$) donc $y-x<0$ donc le chiffre des unités est $b-(x-y)=2$ et celui des $b-zaine$ est $x-y-1=1$. On trouve $x-y=2$ et $b=4$.

n° 107. Déterminer le plus petit entier *n* qui possède les propriétés suivantes :
_ son écriture décimale se termine par 6 ;
_ si on efface le 6 et qu'on le place à gauche le nombre obtenu est le quadruple de *n*.
Une piste : poser la multiplication et calculer les chiffres.

Corrigé.

$$\begin{array}{r} a_n \dots a_5\, a_4\, a_3\, a_2\, a_1\, 6 \\ \times 4 \\ \hline 6 \dots a_5\, a_4\, a_3\, a_2\, a_1 \end{array}$$ On obtient $a_1 = 4$ on retient 2.

Puis $a_2 = 8$, c'est le chiffre des unités de $4a_1 + 2 = 18$ on retient 1.
Puis, a_3 est le chiffre des unités de $4a_2 + 1 = 33$ donc $a_3 = 3$ on retient 3.
Puis, a_4 est le chiffre des unités de $4a_3 + 3 = 15$ donc $a_4 = 5$ on retient 1.
Puis, a_5 est le chiffre des unités de $4a_5 + 1 = 21$ donc $a_5 = 1$ on retient 2.
Puis, a_6 est le chiffre des unités de $4a_5 + 1 = 6$ donc $a_6 = 6$ on s'arrête.
Le nombre cherché est 153 846. Vérification $153\,846 \times 4 = 615\,384$

n° 108. *n* s'écrit avec trois chiffres en base 7 et avec les trois mêmes chiffres dans l'ordre inverse en base 9. Quel est ce nombre ?

Corrigé. $\overline{xyz_7} = \overline{zyx_9} \Rightarrow 7^2 x + 7y + z = 9^2 z + 9y + x.$

$9 \equiv 2[7] \Rightarrow z[7] \equiv 4z + 2y + x \Rightarrow 3z + 2y + x \equiv 0[7]$ (1)
$7 \equiv -2[9] \Rightarrow 4x - 2y + z \equiv x[9] \Rightarrow 3x - 2y + z \equiv 0[9]$ (2)

En additionnant ces deux équations on obtient $4(x+z) = 7\text{k} + 9\text{k}'$ donc le membre de droite est un multiple de 4.

$1 \leqslant x \leqslant 6,\ 0 \leqslant y \leqslant 6$ et $1 \leqslant z \leqslant 6$ donc pour l'équation (1) il y a deux possibilités pour le membre de droite, 7 et 14; pour la (2) il y a 4 possibilités -9, 0, 9 et 18. Seul les couples (7;9) et (14;18) conviennent (7+9 = 16 et 14 + 18 = 32).

Reste à résoudre ces deux systèmes.
Le premier n'a pas de solution $x + z = 4 \Rightarrow 3z + 2y + x = 2z + 2y + 4 \neq 7$ (parité).
Le deuxième donne $x + z = 8$ donc $\left| \begin{array}{l} 2(z+y) + 8 = 14 \\ 2(x-y) + 8 = 18 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} z + y = 3 \\ x - y = 5 \end{array} \right.$ deux cas possibles pour x, 6 ou 5.
Finalement on obtient (6;1;2) et (5;0;3). Après vérification seul (5;0;3) convient.
Donc $\overline{503_7} = \overline{305_9} = \overline{248_{10}}$

BAC. Déterminer les entiers naturels s'écrivant abca dans le système de numération décimale, divisibles par 7 et dont le reste dans la division par 99 est 1.

Corrigé.
$\overline{abca} = 10^3 a + 10^2 b + 10c + a$
$10 = 3[7]$ donc $10^2 = 2[7]$ et $10^3 = -1[7]$

7 divise $\overline{abca}$ donc $-a + 2b + 3c + a \equiv 0[7]$ et $2b + 3c \equiv 0[7]$
On peut faire mieux $3[7] \equiv -4[7]$ donc $2b - 4c \equiv 0[7]$ et $b - 2c = 0[7]$ (7 et 2 sont premiers entre eux donc le théorème de Gauss dit que 7 divise $b - 2c.$)

99 divise $\overline{abca} - 1$ donc 9 et 11 divisent $\overline{abca} - 1$

Divisibilité par 9 : $2a + b + c - 1 = 0[9]$

Divisibilité par 11 : $10 = -1[11]$ donc $10^2 = 1[11]$ et $10^3 = -1[11]$
11 divise $\overline{abca} - 1$ donc $-a + b - c + a - 1 = 0[11]$ et $b - c - 1 = 0[11]$

Commençons par cette dernière équation où b et c sont des chiffres donc compris entre 0 et 9 donc $-9 \leqslant b-c \leqslant 9$ et $b-c=1[11] \Rightarrow b-c=1$ et $b=c+1$

Remplaçons dans la première équation : $b-2c=0[7] \Rightarrow c+1-2c=0[7] \Rightarrow -c=1[7]$
$c\equiv 1[7]\equiv 8[7]$ donc il y a deux cas possibles c=1 et c=8.

Il reste à trouver a dans ces deux cas à l'aide de la deuxième équation :

- $c=8$ et $b=9 \Rightarrow 2a+16=0[9] \Rightarrow 2a=2[9] \Rightarrow 2a=2$ ou $2a=11 \Rightarrow a=1$
- $c=1$ et $b=2 \Rightarrow 2a+2=0[9] \Rightarrow 2a=-2[9] \Rightarrow 2a=16$ ou $2a=7 \Rightarrow a=8$

Donc il y a deux solutions : 1981 et 8218.
Remarque : cette exercice faisait parti du bac 1981 !!!

Résoudre les équations dans $\mathbb{Z}$:

$5x+13y=1$
$9x+6y=3$
$16x+24y=12$

Corrigé.
$5x+13y=1$ Les nombres 5 et 13 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Bézout cette équation a une solution.

Calcul des coefficients de Bézout.
$13=5\times 2+3$ donc $b=2a+3$ donc $3=b-2a$
$5=3\times 1+2$ donc $a=(b-2a)+2$ donc $3a-b=2$
$3=2\times 1+1$ donc $b-2a=3a-b+1$ donc $-5a+2b=1$
Le couple (-5;2) est une solution particulières.

Solution générale. On pose $x=-5+s$ et $y=2+t$ et on obtient $5s=-13t$ 5 et 13 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss 13 divise s.
$s=13k$ en remplaçant on obtient $5\times 13k=-13t$ donc $-5k=s$
Donc $S=\{(-5+13k;2-5k)\}$

Corrigé.
$9x+6y=3$ Le PGCD des nombres 9 et 6 est 3 donc d'après le théorème de Bézout cette équation une a solution.
Même méthode que ci-dessus.

Corrigé.
$16x+24y=12$ Le PGCD des nombres 16 et 24 est 8 et 12 n'est pas un multiple de 8 donc cette équation n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}$. Mais il faut le démontrer.
Supposons que $(x;y)$ soit une solution, 8 divise 16 et 24 donc il divise $16x+24y=12$ Résultat absurde, donc l'hypothèse est fausse, il n'y a pas de solution.