Corrigé des exercices sur les asymptotes.

Asymptotes et limites.

Numéro 49 p 77.

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2} \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

$$\begin{aligned}
x+2+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2} &= \frac{(x+2)(x-1)^2+3(x-1)+1}{(x-1)^2}\\
&= \frac{(x-1)\left((x+2)(x-1)+3\right)+1}{(x-1)^2}\\
&= \frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)+1}{(x-1)^2}\\
&= \frac{x^3-x^2+x^2-x+x-1+1}{(x-1)^2}=f(x)
\end{aligned}$$

On remarque :

_ l'identité remarquable $(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$ C'est une conséquence directe de la formule de la somme des termes d'une suite géométrique. Aller revoir ce cours.
_pour développer, j'ai commencé par factoriser. Les calculs sont moins lourds.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x-1}=0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x-1)^2}=0 \ \Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty} f(x)-(x+2)=0$$

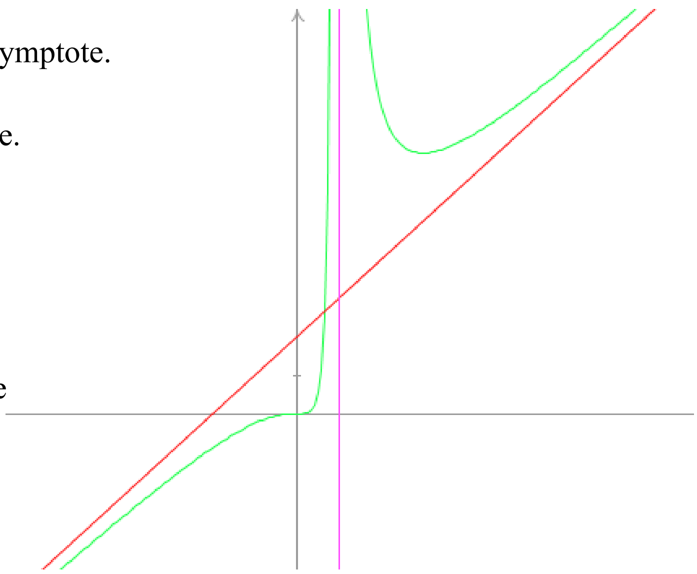
Donc la droite *d* d'équation $y=x+2$ est une asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$.
De même la droite *d* d'équation $y=x+2$ est une asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$.

Position relative de la courbe et de l'asymptote.

On étudie le signe de $f(x)-(x+2)=\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$

Si $x>1$ alors $x-1>0$ et $f(x)-(x+2)>0$
Si $x<1$ il faut faire une étude de signe.

$\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{3(x-1)+1}{(x-1)^2}=\dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$ $(x-1)^2>0$ donc $f(x)-(x+2)$ à le même signe que $3x-2$



Si $x\in\left]\frac{2}{3};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ la courbe est au dessus de l'asymptote.

Si $x\in\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[$ la courbe est en dessous de l'asymptote.

La courbe doit couper l'asymptote au point $A\left(\frac{2}{3};\frac{8}{3}\right)$

La courbe admet aussi la droite d'équation $x=1$ comme asymptote verticale.

Numéro 50 p 77.

$f(x)=x+\sqrt{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}$

On fait une analyse rapide des limites. En $+\infty$ pas de problème, la limite est $+\infty$, la seule possibilité est une asymptote oblique. En $-\infty$ il y a une forme indéterminée.

Limite en $-\infty$.

$$f(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{x^2-x^2-x-1}{x-\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{-x+1}{x-\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$x<0 \Rightarrow \sqrt{x^2}=|x|=-x \Rightarrow \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}=-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

$$f(x)=\frac{-x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=\frac{-1+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{1}{2}$$

La droite d d'équation $y=-\frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$.

Asymptote en $+\infty$

$$f(x)-\left(2\mathrm{x}+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)$$ est une forme indéterminée en $+\infty$

$$f(x)-\left(2\mathrm{x}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{x^2+x+1-x^2-x-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}$$

Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)-\left(2\mathrm{x}+\frac{1}{2}\right)=0$ et la droite d d'équation $y=2\mathrm{x}+\frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$.

Pour ce genre de fonction, en cas de forme indéterminée on multiplie numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée. S'il reste encore une forme indéterminée on factorise par le terme dominant.

Numéro 51 p 77.

$$f(x)=\frac{x^2-1}{2x+1} \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-1}{2}\right\}$$

Transformation de l'écriture. On cherche *a*, *b* et *c* tels que : $f(x)=ax+b+\frac{c}{2x+1}$

Pourquoi a-t-on cette forme ? Le numérateur est de degré 2 et le dénominateur 1 donc on a, en gros, une expression du premier degré plus une fraction rationnelle de numérateur constant et de même dénominateur que *f*.

$$ax+b+\frac{c}{2x+1}=\frac{(ax+b)(2x+1)+c}{2x+1}=\frac{2ax^2+(2b+a)x+(b+c)}{2x+1}$$

Les dénominateurs de f et de l'expression ci-dessus sont égaux, on identifie les numérateurs.

$$\left|\begin{array}{l} 2a=1 \\ 2b+a=0 \\ b+c=-1 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} a=0{,}5 \\ b=-0{,}25 \\ c=-0{,}75 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}-\frac{3}{4(2x+1)}$$

Asymptotes obliques.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{4(2x+1)}=0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to+\infty} f(x)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)=0$$

Donc la droite *d* d'équation $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ est une asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$.

De même la droite *d* d'équation $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ est une asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$.

Position relative de la courbe et de l'asymptote.

On étudie le signe de $f(x)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=\frac{-3}{4(2x+1)}$ qui a le signe opposé de $2x+1$

Si $x\in\left]\frac{-1}{2};+\infty\right[$ la courbe est en dessous de l'asymptote.

Si $x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$ la courbe est au dessus de l'asymptote.