

## Arithmétique

### Exercice

$a$  et  $b$  sont deux entiers strictement positifs.  $n$  est le plus petit entier strictement positif tel que  $b$  divise  $an$ .

Démontrer que  $n$  divise  $b$ .

L'idée est d'écrire  $b = nq' + r$  avec  $0 \leq r < n$  (division euclidienne de  $b$  par  $n$ ).

De démontrer que  $b$  divise  $ar$  et d'en déduire que  $r$  est nul.

$$b = nq' + r \text{ et } 0 \leq r < n$$

(On fait apparaître  $an$ )

$$\text{Donc } ab = anq' + ar \quad (1)$$

$$b \text{ divise } an \Rightarrow an = bq$$

En remplaçant dans (1)

$$ab = bq q' + ar$$

$$ab - bq q' = ar$$

$$(a - q q')b = ar \text{ donc } b \text{ divise } ar \text{ et } 0 \leq r < n$$

$n$  est le plus petit entier strictement positif tel que  $b$  divise  $an$  donc  $r=0$

$$\text{Donc } b = nq' \text{ et } n \text{ divise } b.$$

C.Q.F.D.