

Arithmétique

Exercice

a et b sont deux entiers strictement positifs. n est le plus petit entier strictement positif tel que b divise an .

Démontrer que n divise b .

L'idée est d'écrire $b = nq' + r$ avec $0 \leq r < n$ (division euclidienne de b par n).

De démontrer que b divise ar et d'en déduire que r est nul.

$$b = nq' + r \text{ et } 0 \leq r < n$$

(On fait apparaître an)

$$\text{Donc } ab = anq' + ar \quad (1)$$

$$b \text{ divise } an \Rightarrow an = bq$$

En remplaçant dans (1)

$$ab = bq q' + ar$$

$$ab - bq q' = ar$$

$$(a - q q')b = ar \text{ donc } b \text{ divise } ar \text{ et } 0 \leq r < n$$

n est le plus petit entier strictement positif tel que b divise an donc $r = 0$

$$\text{Donc } b = nq' \text{ et } n \text{ divise } b.$$

C.Q.F.D.