Pistes pour l'exercice 45 page 76.

u est définie par $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$

Démontrer :

1 $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_n \leqslant 2.$

2 $(u_{2n})\uparrow$ *et* $(u_{2n+1})\downarrow$

3 En déduire $u_{2n} \to l_0$ *et* $u_{2n+1} \to l_1$

4 l_0 *et* l_1 *sont solutions de* $x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$ *en déduire leur valeur.*

5 $u_n \to \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$

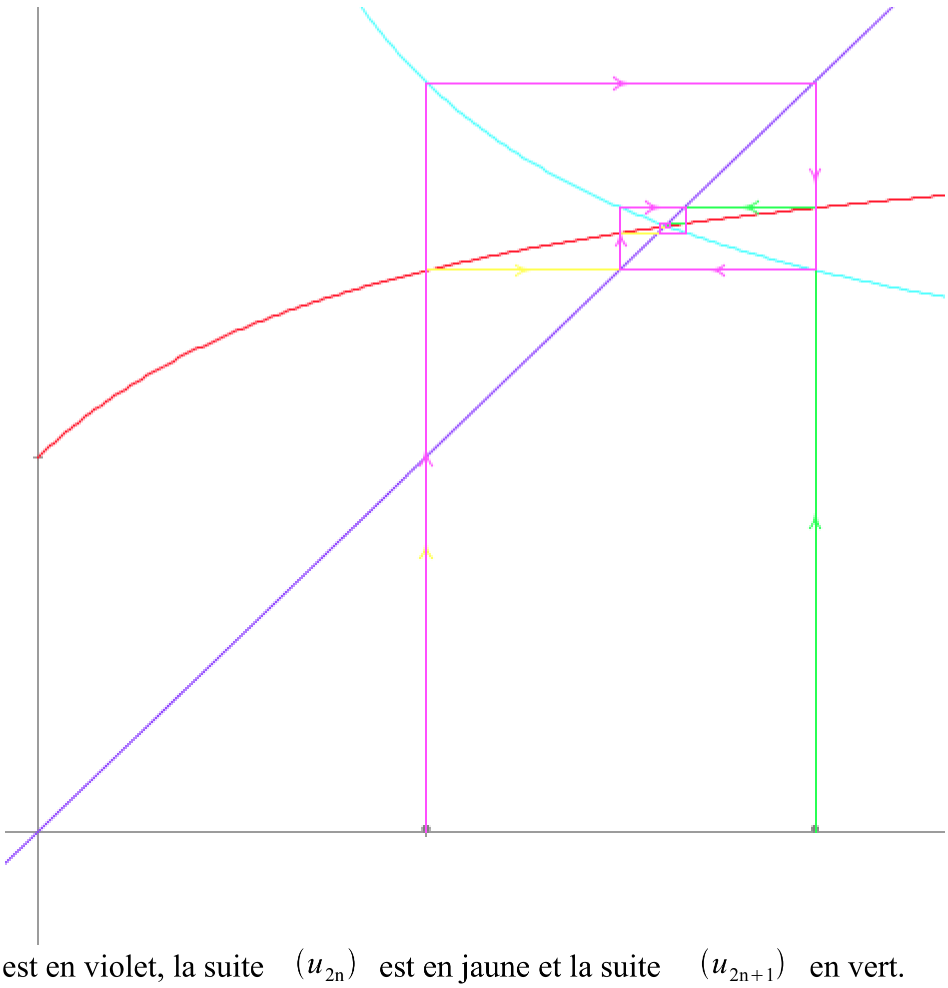
Piste.

D'après le théorème sur les suites récurrentes.

La suite extraite (u_{2n}) est définie par récurrence, elle vérifie donc une relation du type $u_{2(n+1)} = f(u_{2n})$. Cette suite converge vers l_0 donc l_0 est solution de l'équation $x = f(x)$

Pour résoudre la question *4* il faut donc trouver la fonction f à partir de la définition de u_n.

Lecture graphique.



La suite (u_n) est en violet, la suite (u_{2n}) est en jaune et la suite (u_{2n+1}) en vert.

La courbe rouge a pour équation $f(x)=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$ et la courbe bleu ciel $g(x)=1+\dfrac{1}{x}$.

La droite a pour équation $y=x$.

Comment lire ce graphique.

Lecture de u_n sur la courbe polygonale violette : $u_0=1$ sur l'axe des abscisses c'est l'extrémité du premier segment violet (suivre les flèches) l'autre extrémité a pour coordonnées $(u_0\,;g(u_0)=u_1)$ Le segment suivant a pour deuxième extrémité $(u_1\,;u_1)$ car elle appartient à la droite d'équation $y=x$. Le troisième a pour extrémité un point de la courbe de *g* et a donc pour coordonnées $(u_1\,;g(u_1)=u_2)$. La suite des termes est la suite des abscisses de point d'intersections des courbes bleu et violette.

On voit que les trois suites convergent vers le même point de coordonnées $(\Phi\,;\Phi)$.