Première ES Corrigé des exercices sur la dérivation page 103 à 105.

1 QCM. On commence par éliminer les réponses fausses comme 1-a ($f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x + c$)

1-c 2-b 3-a 4-c 5-c 6-b 7-c

Modèles : $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$ **et** $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ **et** $\left(\frac{k}{u}\right)' = \left(k\frac{1}{u}\right)' = k\left(\frac{1}{u}\right)' = -k\frac{u'}{u^2}$

3 a $f(x) = \frac{2}{3} - \frac{1}{x}$ $f'(x) = \left(\frac{2}{3}\right)' - \left(\frac{1}{x}\right)' = -\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$

b $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' + \left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{1}{x^2} + \left(-\frac{2}{x^3}\right) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = -\frac{x+2}{x^3}$

c $f(x) = \frac{-2}{x^2}$ $f'(x) = -2\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -2\left(\frac{-2}{x^3}\right) = \frac{4}{x^3}$

5 a $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x+1}$ $f'(x) = (x)' + (2)' + \left(\frac{1}{1+x}\right)' = 1 + \frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

b $f(x) = 3 - 4x + \frac{5}{2x+3}$ $f'(x) = (3)' + 4(x)' + 5\left(\frac{1}{2x+3}\right)' = 4 + 5\frac{-2}{(2x+3)^2} = \frac{4(2x+3)^2-10}{(2x+3)^2}$

$$= \frac{[2(2x+3) - \sqrt{10}\,][2(2x+3) + \sqrt{10}\,]}{(2x+3)^2} =$$

$$= \frac{(4x + 6-\sqrt{10})(4x + 6+\sqrt{10})}{(2x+3)^2}$$

7 $f(x) = \frac{2}{-x+3}$ sur [-5 ; 2] . Remarque : $-x + 3$ s'annule en 3 donc f(x) est toujours définie sur [-5 ;2].

a Calcul de la dérivée : $f'(x) = 2\left(\frac{1}{-x+3}\right)' = 2\frac{1}{(-x+3)^2}$

b $(-x+3)^2 > 0$ sur [-5 ; 2] donc $f'(x) > 0$.

Tableau de variation :

f est stictement croissante $f(-5) = \frac{1}{4}$ et $f(2) = 2$.

9 $f(x) = -\frac{2}{x+1}$ sur [0 ; 10] . Remarque : x + 1 s'annule en -1 donc f(x) est toujours définie sur [0 ;10].

a Calcul de la dérivée : $f'(x) = -2\left(\frac{1}{x+1}\right)' = -2\ \frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

b $(x+1)^2 > 0$ sur [0 ; 10] donc $f'(x) > 0$.
Tableau de variation :

f est stictement croissante f(0) = -2 et $f(10) = \frac{-2}{11}$.

c Equation de la tangente $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ donc en A(1,-1) la tangente a pour équation : $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

et en $B(3,-\frac{1}{2})$: $y = -\frac{1}{8}x - \frac{7}{8}$

Modèle : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

11 a $f(x) = \frac{2}{3}\ \frac{2x-5}{x+3}$

$f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{2x-5}{x+3}\right)'$ $u(x) = 2x-5$ $u'(x) = 2$

$f'(x) = \frac{2}{3}\ \frac{2(x+3)-1(2x-5)}{(x+3)^2}$ $v(x) = x+3$ $v'(x) = 1$

$f'(x) = \frac{2}{3}\ \frac{11}{(x+3)^2} = \frac{22}{3}\ \frac{1}{(x+3)^2}$

b $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$

$f'(x) = \frac{2x(x+2)-1(x^2-1)}{(x+2)^2}$ $u(x) = x^2-1$ $u'(x) = 2x$

$f'(x) = \frac{x^2+4x+1}{(x+3)^2}$ $v(x) = x+2$ $v'(x) = 1$

c $f(x) = \frac{x+2}{3x^2-4}$

$f'(x) = \frac{1(3x^2-4)-6x(x+2)}{(3x^2-4)^2}$ $u(x) = x+2$ $u'(x) = 1$

$f'(x) = \frac{-3x^2-12x-4}{(3x^2-4)^2}$ $v(x) = 3x^2-4$ $v'(x) = 6x$

13 Astuces ! (Mais comme vous êtes de bons élèves qui appliquaient les conseils du professeur vous avez tracé la courbe avant de calculer et donc trouvez l'astuce).

a Rappel sur les suites géométriques $1+x+x^2 = \frac{(1-x^3)}{1-x}$

$f(x) = \frac{(1-x^3)}{1-x} = x^2 + x + 1$ $f'(x) = 2x + 1$

b $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$ $f'(x) = 1$

c $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2} = 1$ $f'(x) = 0$

15 $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ définie sur [1 ;8]. x+2 s'annule en -2 donc f(x) est toujours définie sur [1 ;8].

a Calcul de la dérivée. $f'(x) = \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)'$ $u(x) = 2x+1$ $u'(x) = 2$

$f'(x) = \frac{2(x+2)-1(2x+1)}{(x+2)^2}$ $v(x) = x+2$ $v'(x) = 1$

$f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$

b $(x+3)^2 > 0$ sur [1 ;8] donc $f'(x) > 0$ Tableau de variations

f est strictement croissante sur [1 ;8].

f(1) = 1 et f(8) = 1,7

c Equation de la tangente $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ donc en $A(2,\frac{5}{4})$ la tangente a pour équation : $y = \frac{3}{16}x-\frac{13}{8}$

17 $f(x) = \frac{x^2-2}{x+1}$ définie sur [0 ;8]. x+1 s'annule en -1 donc f(x) est toujours définie sur [0 ;8].

a Calcul de la dérivée. $f'(x) = \left(\frac{x^2-2}{x+1}\right)'$ $u(x) = x^2-2$ $u'(x) = 2x$

$f'(x) = \frac{2x(x+1)-1(x^2-2)}{(x+1)^2}$ $v(x) = x+1$ $v'(x) = 1$

b $f'(x) = \frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{(x+1)^2+1}{(x+1)^2}$ Astuce ! Sinon pour trouver le signe de $f'(x)$ on cherche celui de x^2+2x+2, $\Delta<0$ donc le trinôme est strictement du signe de 1 donc strictement posif et $f'(x) > 0$.

b $(x+1)^2 \geq 0$ sur [1 ;8] et 1>0 donc $f'(x) > 0$

f est strictement croissante sur [0 ;8]. Tableau de variations

$f(0) = -2$ et $f(8) = \frac{14}{9}$