Corrigé des exercices sur l'étude de fonctions

Dérivabilité.

La fonction *f* définie par $f(x)=x\sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ?

$$h>0,\ \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\sqrt{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\sqrt{h}=0=f'(0).$$

f est dérivable en 0.

La fonction *f* définie par $f(x)=(x+1)\sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0, $x\geqslant 0$?

$$h>0,\ \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h+1)\sqrt{h}}{\sqrt{h}\sqrt{h}}=\lim_{h\to 0}\frac{(h+1)}{\sqrt{h}}=+\infty$$

f n'est pas dérivable en 0.

Etude de fonctions.

1_ Etude de *f* définie par $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$

Ensemble de définition.

$f(x)$ existe si $x+2\neq 0$ donc $D_f=]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$

Changement d'écriture.

$$a+\frac{b}{x+2}=\frac{a(x+2)+b}{x+2}=\frac{ax+(2a+b)}{x+2}$$

On identifie les numérateurs de l'expression ci-dessus et de *f*.

$$\left|\begin{array}{l} a=1 \\ 2a+b=1 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} a=1 \\ b=-1 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad f(x)=1-\frac{1}{x+2}$$

Limites et asymptotes.

On travaille avec cette dernière écriture de $f(x)$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+2}=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=1$ et la droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à la courbe au voisinage de $+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+2}=0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}f(x)=1$ et la droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à la courbe au voisinage de $-\infty$.

$\lim_{x\to-2}\frac{1}{x+2}$ est infinie. Il faut faire une étude de signe pour *x* proche de -2.

Pour $x<-2$, $\frac{1}{x+2}<0$ donc $\lim_{x\to-2\ x<-2} 1-\frac{1}{x+2}=+\infty$ et $\lim_{x\to-2\ x<-2} f(x)=+\infty$

Pour $x>-2$, $\frac{1}{x+2}>0$ donc $\lim_{x\to -2\ x>-2} 1-\frac{1}{x+2}=-\infty$ et $\lim_{x\to -2\ x>-2} f(x)=-\infty$

La droite d'équation $x=-2$ est une asymptote verticale à la courbe.

Position de la courbe par rapport à l'asymptote à l'infini.

On étudie le signe de $f(x)-1=-\frac{1}{x+2}$

Pour $x<-2$, $-\frac{1}{x+2}>0$ donc la courbe est au dessus de l'asymptote.

Pour $x>-2$, $-\frac{1}{x+2}<0$ donc la courbe est en dessous de l'asymptote.

$f\,'$ et tableau de variation.

$f\,'(x)=(1)'-\frac{-1}{(x+2)^2}=\frac{1}{(x+2)^2}>0$ La fonction est strictement croissante.

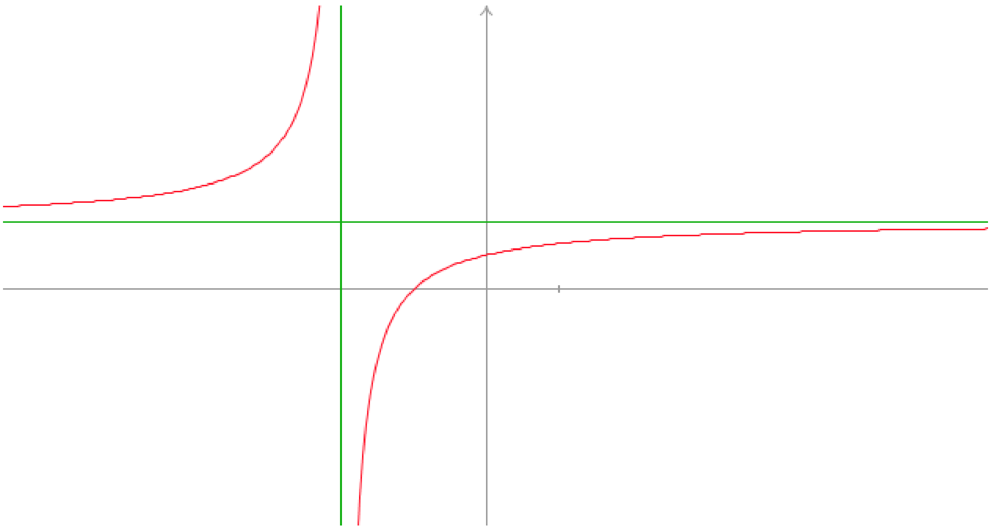
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f\,'$	$+$	||	$+$
f	1 ↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗ 1

Centre de symétrie.

S'il y a un centre de symétrie les asymptotes doivent être symétriques donc ce ne peut être que leur point d'intersection $C(-2;1)$.

$2-f(-4-x)=2-(1-\frac{1}{-4-x+2})=1+\frac{1}{-x-2}=1-\frac{1}{x+2}=f(x)$

C est bien le centre de symétrie. La courbe est une hyperbole équilatère. (Les asymptotes sont perpendiculaires)



2_ Etude de *f* définie par $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+4}{x+1}$

Ensemble de définition.

$f(x)$ existe si $x+1\neq 0$ donc $D_f=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

Changement d'écriture.

$$ax+b+\frac{c}{x+1}=\frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}=\frac{ax^2+(a+b)x+(b+c)}{x+1}$$

On identifie les numérateurs de l'expression ci-dessus et de *f*.

$$\left|\begin{array}{l} a=2 \\ a+b=3 \\ b+c=4 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} a=2 \\ b=1 \\ c=3 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad f(x)=2\text{x}+1+\frac{3}{x+1}$$

Limites et asymptotes.

On travaille avec cette dernière écriture de $f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x+1}=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x+1}=0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3}{x+1}$ est infinie. Il faut faire une étude de signe pour *x* proche de -1.

Pour $x<-1$, $\dfrac{3}{x+1}<0$ donc $\lim\limits_{x\to-1\ x<-1}f(x)=-\infty$

Pour $x>-1$, $\dfrac{3}{x+1}>0$ donc $\lim\limits_{x\to-1\ x>-1}f(x)=+\infty$

La droite d'équation $x=-1$ est une asymptote verticale à la courbe.

D'après la forme de la fonction on peut conjecturer que la droite *d* d'équation $y=2x+1$ est une asymptote oblique.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(x+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x+1}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(x+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x+1}=0$

Donc *d* est asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Position de la courbe par rapport à l'asymptote à l'infini.

On étudie le signe de $f(x)-(2x+1)=\dfrac{3}{x+1}$

Pour $x<-1$, $\dfrac{3}{x+1}<0$ donc la courbe est en dessous de l'asymptote.

Pour $x>-1$, $\dfrac{3}{x+1}>0$ donc la courbe est au dessus de l'asymptote.

f' et tableau de variation

$$f'(x)=(2x+1)'+\left(\frac{3}{x+1}\right)'=2-\frac{3}{(x+1)^2}=\frac{2(x+1)^2-3}{(x+1)^2}$$

f' a le même signe que le numérateur.

$$2(x+1)^2-3=2\left((x+1)^2-\frac{3}{2}\right)=2\left(\left(x+1-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x+1+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$$

Les racines de f' sont $x_1=-1-\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{-2-\sqrt{6}}{2}$ et $x_2=\frac{-2+\sqrt{6}}{2}$

$f'>0$ sur $]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$
$f'<0$ sur $]x_1, -1[\cup]-1, x_2[$

x	$-\infty$		x_1		-1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
f	$-\infty$	↗	M	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	m	↗	$+\infty$

$M=f(x_1)=-2\sqrt{6}-1$ est un maximum.
$m=f(x_2)=2\sqrt{6}-1$ est un minimum.

Centre de symétrie

S'il y a un centre de symétrie les asymptotes doivent être symétriques donc ce ne peut être que leur point d'intersection $C(-1;-1)$.

$$-2-f(-2-x)=-2-(-4-2x+\frac{3}{-2-x+1})=2x+1-\frac{3}{-x-1}=2x+1+\frac{3}{x+1}=f(x)$$

C est bien le centre de symétrie. La courbe est une hyperbole.

La courbe est représentée dans un repère orthogonal mais pas orthonormé.