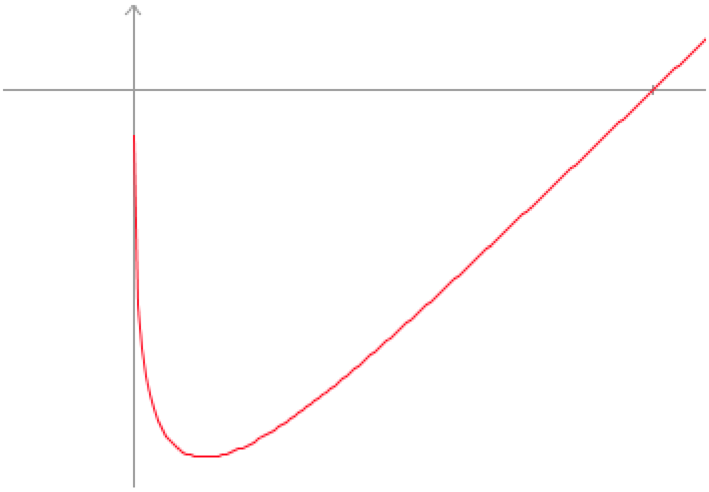
15_a $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\ln x$ est une forme indéterminée.



En posant

$y=\sqrt{x}$, $\sqrt{x}\ln x = y\ln y^2 = 2y\ln y$

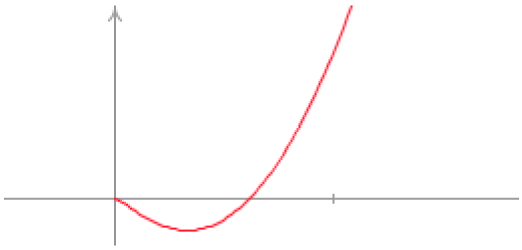
Quand x tend vers 0, y tend vers 0 et on sait que $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$ donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\ln x = \lim_{y\to 0} 2y\ln y = 0}$$

15_b $\lim_{x\to 0} x^{\frac{3}{2}}\ln(x^2+x)$ est une forme indéterminée.

$x^{\frac{3}{2}}\ln(x^2+x) = x^{\frac{3}{2}}\ln x(x+1) = x^{\frac{3}{2}}\ln x + x^{\frac{3}{2}}\ln(x+1)$

Le deuxième terme ne pose pas de problème, $\lim_{x\to 0} x^{\frac{3}{2}}\ln(x+1) = 0$



En posant $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y^{\frac{2}{3}} = x$ et $x^{\frac{3}{2}}\ln x = y\ln y^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}y\ln y$

Quand x tend vers 0, y tend vers 0 et on sait que

$\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$ donc :

$\lim_{x\to 0} x^{\frac{3}{2}}\ln x = \frac{2}{3}\lim_{y\to 0} y\ln y = 0$ et $\boxed{\lim_{x\to 0} x^{\frac{3}{2}}\ln(x^2+x) = 0}$

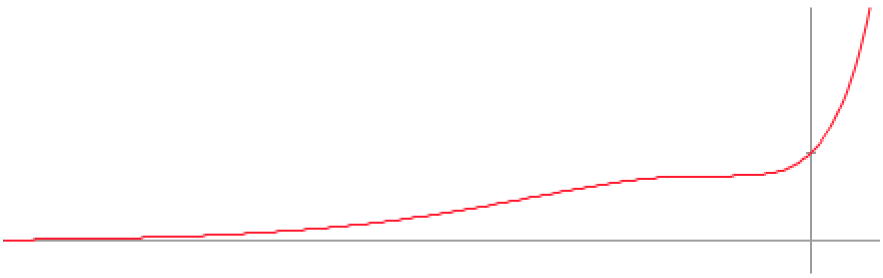
15_c $\lim_{x\to -\infty} (x^2+1)e^x$ est une forme indéterminée.

$(x^2+1)e^x = x^2e^x + e^x$

$\lim_{x\to -\infty} x^2e^x = 0$ et $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$

donc :

$$\boxed{\lim_{x\to -\infty}(x^2+1)e^x = 0}$$

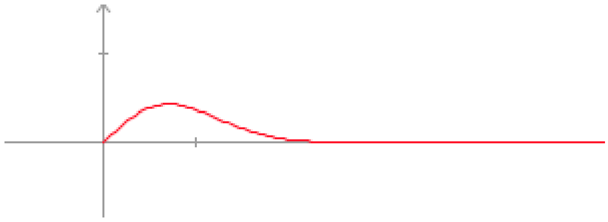


15_c $\lim_{x\to +\infty} x e^{-x^2}$ est une forme indéterminée.

La fonction exponentielle est croissante donc :

pour $x>1$, $x^2>x$ donc $e^{x^2}>e^x$ et $\frac{1}{e^{x^2}}<\frac{1}{e^x}$

$0 < x e^{-x^2} < \dfrac{x}{e^x}$



$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

D'après le théorème des gendarmes :

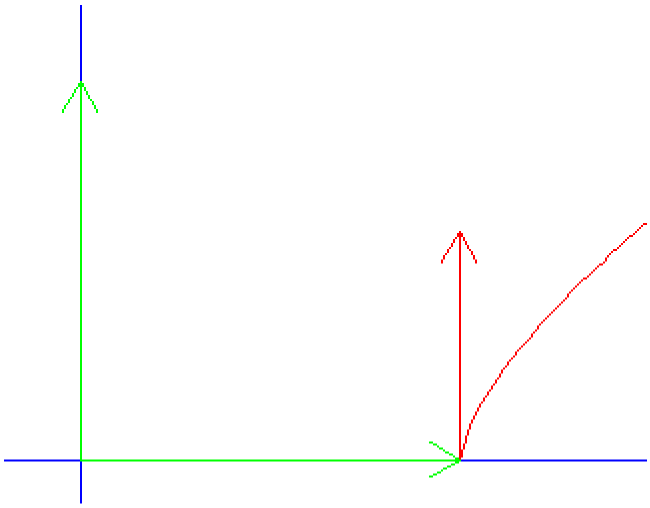
$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x^2} = 0}$

16_ f est définie sur $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$

Etude de la dérivabilité en 1.

Pour $h > 0$, $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{\sqrt[3]{h^2}}{h} = \sqrt[3]{\dfrac{h^2}{h^3}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{h}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{h}}$ et $\lim\limits_{x \to h^+} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = +\infty$

La fonction n'est pas dérivable en 1 mais admet une demi-tangente verticale.



17_ Equations différentielles.

$y' + 4y = 2$ a pour solution particulière $y_0 = \dfrac{1}{2}$

f est une solution de l'équation si et seulement si la fonction g définie par $g(x) = f(x) - \dfrac{1}{2}$ est solution de l'équation $y' + 4y = 0$ (2)

$f' + 4f = 2 \Leftrightarrow f' + 4\left(f - \dfrac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow g' + 4g = 0$

La solution générale de l'équation (2) est g définie par $g(x) = k e^{-4x}$, $k \in \mathbb{R}$, donc la solution générale de $y' + 4y = 2$ est f définie par $f(x) = k e^{-4x} + \dfrac{1}{2}$, $k \in \mathbb{R}$.