Exercice sur le P.G.C.D.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a = 11n+3$, $b = 13n-1$.

1_ Démontrer que $pgcd(a,b) = pgcd(a, 50)$.

2_ Résoudre l'équation $50x - 11y = 3$ pour $(x, y) \in \mathbb{N}^2$
En déduire les valeurs pour lesquelles $pgcd(a,b) = 50$.

3_ Pour quelles valeurs de *n* $pgcd(a,b) = 25$?

Corrigé.

1_ On va démontrer que, *d* divise *a* et *b* implique *d* divise *a* et 50, puis la réciproque.
Le truc est de trouver *u* et *v* tels que $au + bv = 50$. Donc il faut supprimer *n*. Comme le P.P.C.M de 11 et 13 est 11×13 on va multiplier *a* par 13 et *b* par -11.

$13a - 11b = 13 \times 11n + 39 - 11 \times 13n + 11 = 50$
Si d divise *a* et *b* alors *d* divise $13a - 11b = 50$ donc *d* divise *a* et 50.

Réciproquement, si d divise *a* et 50 alors *d* divise $11b = 50 + 13a$
11, nombre premier, ne divise pas 50 donc $d \neq 11k$, 11 et *d* sont premiers entre eux d'après le théorème de Gauss *d* divise *b*. Donc *d* divise *a* et *b*.

L'ensemble des diviseurs communs de *a* et *b* est égal à l'ensemble des diviseurs communs de *a* et 50 donc $pgcd(a,b) = pgcd(a, 50)$.

2_ Résolution de $50x - 11y = 3$ pour $(x, y) \in \mathbb{N}^2$
50 et 11 sont premiers entre eux donc l'équation à une solution.

On applique l'algorithme d'Euclide.

$50 = 11 \times 4 + 6$	$a = 4b + 6 \Rightarrow a - 4b = 6$
$11 = 6 + 5$	$b = 6 + 5 \Rightarrow b = a - 4b + 5 \Rightarrow -a + 5b = 5$
$6 = 5 + 1$	$6 = 5 + 1 \Rightarrow a - 4b = -a + 5b + 1 \Rightarrow 2a - 9b = 1$

Vérification : $2 \times 50 - 9 \times 11 = 1$

Une solution particulière de $50x - 11y = 3$ est (6 ; 27).

Recherche de la solution générale.
Soit $(x ; y)$ une solution. On pose $x = 6 + \alpha$ et $y = 27 + \beta$ donc :
$$50(6+\alpha) - 11(27+\beta) = 3 \Rightarrow 50\alpha - 11\beta = 0 \Rightarrow 50\alpha = 11\beta = 0$$
50 et 11 sont premiers entre eux d'après le théorème de Gauss 11 divise α et $\alpha = 11k$.
$50 \times 11k = 11\beta \Rightarrow 50k = \beta$ donc $x = 6 + 11k$ et $y = 27 + 50k$

Vérification : $50(6 + 11k) - 11(27 + 50k) = 3$

On travaille dans $\mathbb{N}^2$ donc $S = \{(6 + 11k ; 27 + 50k), k \in \mathbb{N}\}$

3_ $pgcd(a;b)=pgcd(a;50)$ donc $pgcd(a;b)=50$ si 50 et seulement si 50 divise a :
$a=50q \Leftrightarrow 11n+3=50q \Leftrightarrow 50q-11n=3$ donc $(q;n)$ est solution de l'équation
$50x-11y=3$ pour $(x,y)\in\mathbb{N}^2$ donc $n=27+50k$
$a=11(27+50k)+3=300+550k$ et $b=13(27+50k)-1=350+650k$, $k\in\mathbb{N}$.

4_ Avec le même raisonnement, $pgcd(a;b)=25$ si et seulement si $a=25q$ et <u>q impair</u> (a ne doit pas être un multiple de 50).

$(q;n)$ doit être solution de 25 x – 11 y = 3.

$25=2\times 11+3$ donc une solution particulière est (1 ; 2) et l'ensemble des solutions dans $\mathbb{N}^2$ est $S=\{1+11k;2+25k,\ k\in\mathbb{N}\}$
q est impair si k est pair donc si $n=2+50l$ ($k=2l$) donc :
$a=11(2+50l)+3=25+550l$ et $b=13(2+50l)-1=25+650l$ où $l\in\mathbb{N}$.