Corrigé des exercices sur la récurrence.

Exercice n°1.

Démontrer : pour tout $n \geqslant 1,\ 1^3+2^3+...+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}=(1+2+...+n)^2$

Démonstration.

La deuxième égalité est une conséquence directe de la formule de la somme des termes d'une suite arithmétique. Allez voir ce cours.

Pour la première, on appelle $P(n)$ la proposition : $1^3+2^3+...+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Initialisation

$1^3=\dfrac{1^2\times 2^2}{4}$ donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité.

On suppose $P(n)$ vraie.

$1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$ En appliquant $P(n)$.

$$1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}$$
$$=\frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4}$$
$$=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$
$$=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion.

Pour tout $n \geqslant 1$, $P(n)$ est vraie.

Exercice n°2.

Démontrer : pour tout $n \in \mathbb{N}$, 4^n+2 est divisible par 3. (***a*** divisible par 3 s'écrit : $a = 3q$)

Démonstration.

On appelle $P(n)$ la proposition : 4^n+2 est divisible par 3.

Initialisation

$4^0+2=3$ donc $P(0)$ vraie.

Hérédité.

On suppose $P(n)$ vraie. Donc que $4^n+2=3\ p$ ou encore $4^n=3\ p-2$
$4^{n+1}+2=4^n\times 4+2=(3\ p-2)\times 4+2=12\ p-6=3\ (4\ p-2)$
Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion.

Pour tout $n\geqslant 0$, $P(n)$ est vraie.

Exercice n°3.

Démontrer : $a\geqslant 0$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*, (1+a)^n\geqslant 1+na.$

Démonstration.
On appelle $P(n)$ la proposition : $a\geqslant 0,\ n\in\mathbb{N}^*, (1+a)^n\geqslant 1+na.$

Initialisation

$1+a\geqslant 1+a$ donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité.

On suppose $P(n)$ vraie.
$a\geqslant 0$ donc $1+a>0$ et $(1+a)^{n+1}=(1+a)^n(1+a)\geqslant(1+na)(1+a)$ en appliquant $P(n)$
$(1+a)^{n+1}\geqslant(1+na)(1+a)=1+na+a+na^2=1+(n+1)a+na^2\geqslant 1+(n+1)a$ ($na^2\geqslant 0$)
Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion.

Si $a\geqslant 0$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*, (1+a)^n\geqslant 1+na.$

Exercice n°4.

Soit *u* la suite définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=2\ u_n-3$
a_ Calculer $u_1-u_0, u_2-u_1, u_3-u_2, u_4-u_3, u_5-u_4$.
b_ Conjecturer une écriture de u_n en fonction de *n* (une piste, suite géométrique).
c_ Démontrer cette conjecture.

a_ $u_1-u_0=-1$, $u_2-u_1=-2$, $u_3-u_2=-4$, $u_4-u_3=-8$, $u_5-u_4=-16$
On remarque que la suite obtenue est géométrique de raison $q=2$

b_ Pour conjecturer une expression des premiers termes on se sert de la relation trouvée en a
$u_1=-1+u_0=-2^0+2$, $u_2=-2^1+u_1=-2^1-2^0+2$, $u_3=-2^2+u_2=-2^2-2^1-2^0+2$, ...
$$u_n=-2^{n-1}-2^{n-2}-2^{n-3}-...-2^2-2^1-2^0+2=-\frac{1-2^n}{1-2}+2=-2^n+3$$

c_ Démonstration par récurrence.

On appelle $P(n)$ la proposition : $u_n = -2^n + 3$

Initialisation

$-2^0 + 3 = 2 = u_0$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité.

On suppose $P(n)$ vraie.
$u_{n+1} = 2\, u_n - 3 = 2\,(-2^n + 3) - 3 = 2^{n+1} + 3$
Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion.

Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = -2^n + 3$