Exercices corrigés sur les suites définies par des intégrales.

Exercice n°1

On définit sur $\mathbb{N}^*$ les suites (u_n) et (v_n) par $\begin{cases} u_1=1 \\ u_n=u_{n-1}+\dfrac{1}{n} \end{cases}$ et $v_n=u_n-\ln n$

1 a. $u_2=\dfrac{3}{2}$, $u_3=\dfrac{11}{6}$, $u_4=\dfrac{25}{12}$

1 b. Soit P_n la propriété : $u_n=\sum_1^n \dfrac{1}{k}$

Initialisation.

$\sum_1^1 \dfrac{1}{k}=1=u_1$ Donc P_1 est vérifié.

Hérédité.

On suppose P_n vrai.

$u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{n+1}$

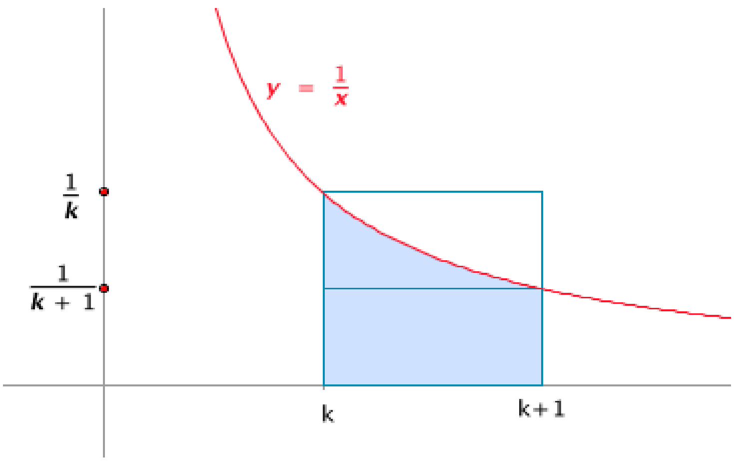
On applique l'hypothèse de récurrence : $u_{n+1}=\sum_1^n \dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{n+1}=\sum_1^{n+1} \dfrac{1}{k}$

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion.

$u_n=\sum_1^n \dfrac{1}{k}$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

2 a. Ici, géométriquement, on va encadrer l'aire sous la courbe d'une fonction avec l'aire de deux rectangles.



Par le calcul il faut encadrer, sur l'intervalle $[k\,;k+1]$ correspondant aux bornes de l'intégrale, la fonction f par deux constantes.

k est un entier strictement positif, la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc pour tout $x \in [k\,;k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$

On intègre chaque membre sur $[k\,;k+1]$:

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}dx$$

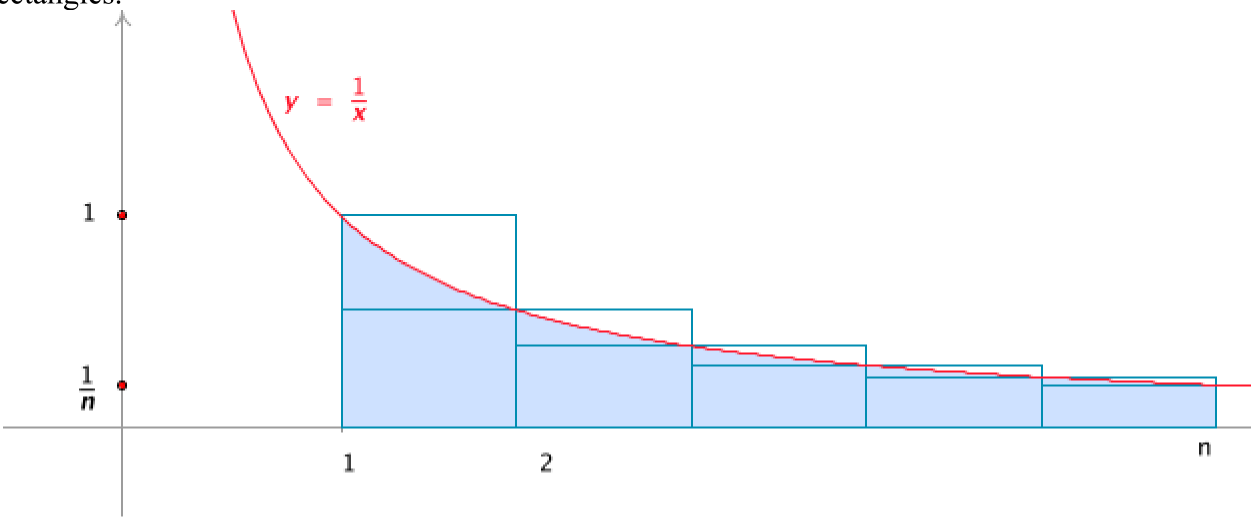
$$\left[\frac{x}{k+1}\right]_k^{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \leqslant \left[\frac{x}{k}\right]_k^{k+1}$$

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \leqslant \frac{1}{k}}$$

2 b. On va sommer les membres de cette inégalité pour k variant de 1 à n-1.

$$\sum_1^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_1^{n-1}\left(\int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx\right) \leqslant \sum_1^{n-1} \frac{1}{k}$$

Géométriquement on encadre l'aire sous la courbe par la somme des aires de deux suites de rectangles.



D'après le résultat de la question 1 b :

$$u_{n-1} = \sum_1^{n-1} \frac{1}{k} = u_n - \frac{1}{n}$$

$$\sum_1^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = u_n - 1$$

D'après la relation de Chasles :

$$\sum_1^{n-1}\left(\int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx\right) = \left(\int_1^n \frac{1}{x}dx\right) = [\ln x]_1^n = \ln n$$

On en déduit :

$$\boxed{u_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant u_n - \frac{1}{n}}$$

Donc $-1\leqslant \ln -u_n\leqslant \frac{-1}{n}$ et $1\geqslant u_n-\ln n\geqslant 0$ donc $\boxed{0\leqslant v_n\leqslant 1}$

3 a. $\boxed{v_{n+1}-v_n=u_{n+1}-u_n-(\ln(n+1)-\ln n)=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx}$

D'après le résultat de la question 2 a : $\boxed{\frac{1}{n+1}\leqslant \int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx}$ donc $v_{n+1}-v_n\leqslant 0$

La suite (v_n) est décroissante.

4 La suite (v_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers $\gamma\geqslant 0$.

$u_n=v_n+\ln n$, $\lim\limits_{+\infty} v_n=\gamma$, $\lim\limits_{+\infty}\ln n=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{+\infty} u_n=+\infty}$