Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.
Le point *F*, appelé foyer de la parabole, a pour coordonnées (0 ; 4).
Soit *M* de coordonnées (*x* ; *y*), on note *H* est le projeté orthogonal de *M* sur l'axe des abscisses, cet axe est la directrice de la parabole.

1_a_ Calcul de *MF* et *MH*.

$$\overrightarrow{FM}\begin{pmatrix}x\\y-4\end{pmatrix} \text{ donc } \boxed{MF=\sqrt{x^2+(y-4)^2}}$$

La distance du point *M* à la directrice $(O\ ;\ \vec{i})$ est la longueur *MH*. *H* est le projeté orthogonal de *M* sur $(O\ ;\ \vec{i})$ donc a pour coordonnées $(x\ ;\ 0)$.

$$\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} \text{ donc } \boxed{MH=\sqrt{y^2}=|y|}$$

1_b_ Condition nécessaire.
M est équidistant de *F* et $(O\ ;\ \vec{i})$ donc :

$$MF=MH$$
$$MF^2=MH^2$$
$$x^2+(y-4)^2=y^2$$
$$x^2+y^2-8y+16=y^2$$
$$x^2+16=8y$$
$$y=\frac{x^2}{8}+2$$

Donc *M* appartient à la parabole *P* d'équation $y=\frac{x^2}{8}+2$

Condition suffisante.

M appartient à la parabole *P* donc a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x\\\frac{x^2}{8}+2\end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{FM}\begin{pmatrix}x\\\frac{x^2}{8}-2\end{pmatrix} \text{ donc } MF^2=x^2+(\frac{x^2}{8}-2)^2=\frac{x^4}{64}+\frac{x^2}{2}+4=\left(\frac{x^2}{8}+2\right)^2$$

$$\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}0\\\frac{x^2}{8}+2\end{pmatrix} \text{ donc } MH^2=\left(\frac{x^2}{8}+2\right)^2$$

$$MF^2=MH^2$$

<u>Les longueurs sont positives</u> donc $MF=MH$

Donc tout point de la parabole est équidistant du foyer et de la directrice.

Conclusion.

L'ensemble des points équidistant de *F* et de l'axe des abscisses est la parabole *P*.

2_ T est un point de la parabole d'abscisse a donc a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ \frac{a^2}{8}+2 \end{pmatrix}$.

T' est le projeté orthogonal de T sur l'axe des abscisses donc il a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$.

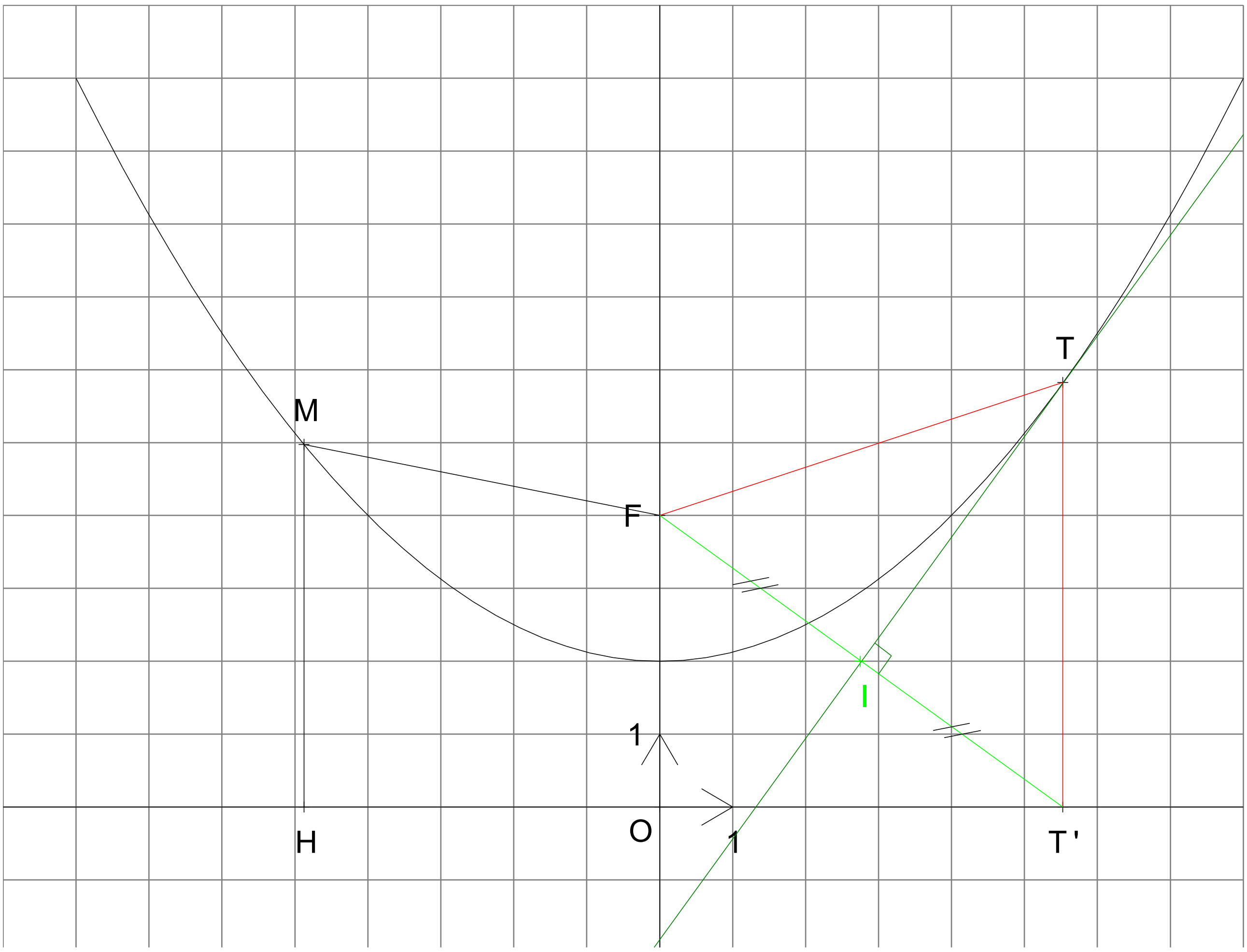
2_a_ Δ est la médiatrice du segment $[FT']$ donc est perpendiculaire au milieu, I, de ce segment.

Le segment $[FT']$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{FT'}\begin{pmatrix} a \\ -4 \end{pmatrix}$ et pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ a \end{pmatrix}$

Le milieu I a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x-\frac{a}{2} \\ y-2 \end{pmatrix}$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}=k\vec{n} \Leftrightarrow a(x-\frac{a}{2})-4(y-2)=0 \Leftrightarrow ax-4y-\frac{a^2}{2}+8=0$$

La médiatrice de $[FT']$ a pour équation $\boldsymbol{y=\frac{a}{4}x-\frac{a^2}{8}+2}$



2_b_ Intersection de Δ et *P*.

Le couple de coordonnées d'un point d'intersection est solution du sytème :

$$\begin{cases} y=\dfrac{a}{4}x-\dfrac{a^2}{8}+2 \\ y=\dfrac{x^2}{8}+2 \end{cases}$$

L'abscisse est solution de l'équation :

$$\frac{x^2}{8}+2=\frac{a}{4}x-\frac{a^2}{8}+2$$
$$x^2-2ax+a^2=0$$
$$(x-a)^2=0$$
$$x=a$$

$T\begin{pmatrix} a \\ \dfrac{a^2}{8} \end{pmatrix}$ est le seul point d'intersection de Δ et *P*.

Δ est la tangente en *T* à la parabole *P*.