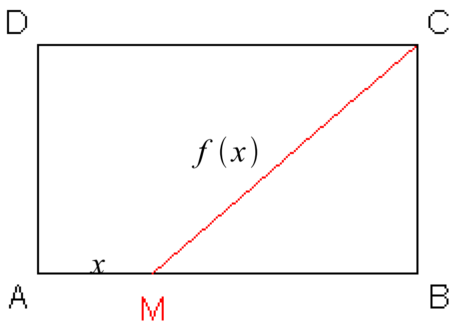
Corrigé de l'exercice n° 109 page 104

ABCD est un rectangle de longueur $AB = 5$ cm et de largeur $AD = 3$ cm. *M* est un point mobile qui parcourt le rectangle en partant de *A* et passant successivement par *B*, *C* et *D*.
On note *x* la distance parcourue par *M* et $f(x)$ la distance de *C* à *M*.

1 Variations de *f* sur [0 ; 16].

On note x_1 et x_2 les distances parcourues par respectivement M_1 et M_2.

1er cas. *M* appartient à [*AB*[donc *x* appartient à [0 ; 5[, $x = AM$ et $BM = AB - x$.



ABCD est un rectangle donc $f(x) = CM$ est la longueur de l'hypothénuse du triangle *MBC* rectangle en *B*. D'après le théorème de Pythagore de Samos :

$$CM^2 = BM^2 + CB^2 \quad (1)$$

Pour tout couple $(x_1 ; x_2)$, $x_1 \in [0 ; 5[$, $x_2 \in [0 ; 5[$:

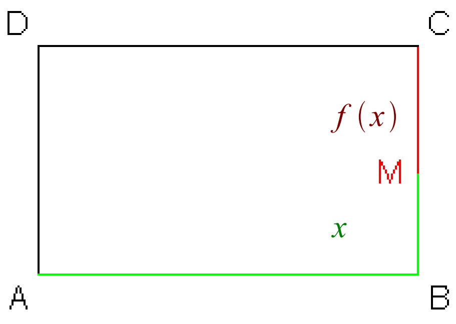
$$x_1 < x_2 < 5 \Rightarrow AM_1 < AM_2 \Rightarrow BM_1 = AB - AM_1 > BM_2 = AB - AM_2 > 0 \Rightarrow BM_1^2 > BM_2^2$$

D'après la relation (1), $CM_1^2 > CM_2^2$

$CM_1 \geqslant 0$, $CM_2 \geqslant 0$ donc $CM_1 > CM_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$

La fonction *f* est strictement décroissante sur [0 ; 5[.

2ème cas. *M* appartient à [*BC*[donc *x* appartient à [5 ; 8[.



$x = AB + BM$ et $f(x) = CM$ donc pour tout couple $(x_1 ; x_2)$, $x_1 \in [5 ; 8[$, $x_2 \in [5 ; 8[$:

$$5 \leqslant x_1 < x_2 < 8 \Rightarrow AB + BM_1 < AB + BM_2 \Rightarrow BM_1 < BM2 \Rightarrow CM_1 = BC - BM_1 > CM_2 = BC - BM_2$$

$f(x_1) > f(x_2)$ donc l**a fonction *f* est strictement décroissante sur [5 ; 8[.**

3ème cas. *M* appartient à [*CD*[donc *x* appartient à [8 ; 13[.
$x = AB + BC + CM$ et $f(x) = CM$ en raisonnant comme pour le 2ème cas :
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ donc ***f* est strictement croissante sur [8 ; 13[.**

4ème cas. M appartient à $[DA[$ donc x appartient à [13 ; 16[.
$x = AB + BC + CM$ et $f(x)=CM=\sqrt{CD^2+DM^2}$ en raisonnant comme pour le 1er cas :
$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ donc ***f* est strictement croissante sur [13 ; 16[.**

2 Intervalles où *f* est affine.

1er cas. M appartient à $[BC[$ donc x appartient à [5 ; 8[, $x = AB + BM$ et $f(x)=CM$ donc

$$AB+BC=AB+BM+MC$$
$$8=x+f(x)$$
$$f(x)=-x+8$$

La fonction *f* est affine sur [5 ; 8[.

2ème cas. M appartient à $[CD[$ donc x appartient à [8 ; 13[, $x = AB + BC + CM$ et $f(x)=CM$ donc :

$$x=AB+BC+f(x)$$
$$x=8+f(x)$$
$$f(x)=x-8$$

La fonction *f* est affine sur [8 ; 13[.

3 Expression de *f* sur les autres intervalles.

1er cas. M appartient à $[AB[$ donc x appartient à [0 ; 5[, $x = AM$.
$CM^2=BM^2+CB^2$ (1) et $f(x)=CM\geqslant 0$ donc :

$$f(x)=\sqrt{BM^2+CB^2}$$
$$f(x)=\sqrt{(AB-AM)^2+CB^2}$$
$$f(x)=\sqrt{(5-x)^2+9}$$

2ème cas. M appartient à $[DA[$ donc x appartient à [13 ; 16[.
$x = AB + BC + CM$ et $f(x)=CM=\sqrt{CD^2+DM^2}$

$$f(x)=\sqrt{CD^2+(AB+BC+CD-(AB+BC+CM))^2}$$
$$f(x)=\sqrt{25+(13-x)^2}$$

4 Représentation graphique de *f*.