Chanvre, primidi, 21 vendémiaire, an CCXVI

Propriétés de la Parabole.

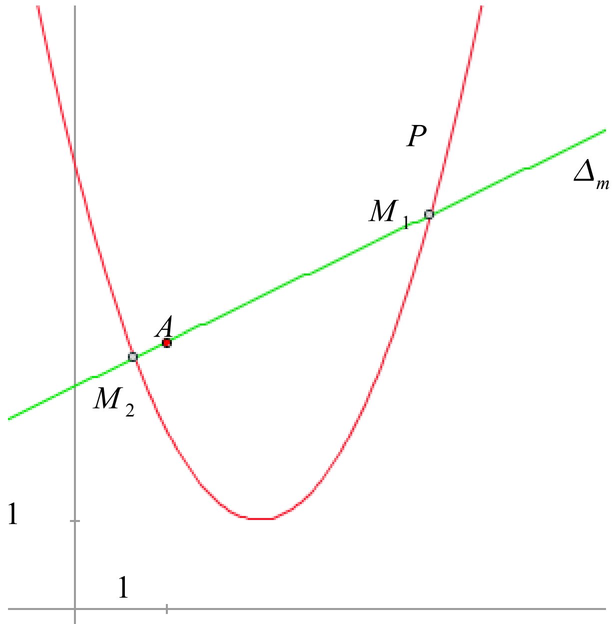
Exercice n° 134 page 55.

Le plan est muni du repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.
Soit la parabole *P* d'équation : $y = x^2 - 4x + 5$.

A_ La droite Δ_m de coefficient directeur *m* donc elle a une équation de la forme $y = mx + q$

Le point *A* de coordonnées (1 ; 3) appartient à Δ_m donc $3 = m + q$ et $q = 3 - m$

L'équation réduite de $\boldsymbol{\Delta_m}$ est : $\boldsymbol{y = mx + m - 3}$



On peut remarquer, et l'énoncé aurait dû le faire, que le point *A* est à l'intérieur de la parabole et que la droite Δ_m par définition (elle admet un coefficient directeur *m*) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc il y a toujours deux points d'intersection.
On note M_1 et M_2 les points d'intersections de Δ_m et *P*.

1_a_ Un point d'intersection de Δ_m et de *P* appartient à la droite Δ_m donc ses cordonnées (*x* ; *y*) sont solutions de l'équation $y = mx + 3 - m$.

Un point d'intersection de Δ_m et de *P* appartient à la parabole *P* donc ses cordonnées (*x* ; *y*) sont solutions de l'équation $y = x^2 - 4x + 5$.

Le couple de coordonnées d'un point d'intersection est solution du système :

$$\begin{cases} y = mx + 3 - m \\ y = x^2 - 4x + 5 \end{cases}$$

donc

$$x^2 - 4x + 5 = mx + 3 - m$$
$$x^2 - (4 + m)x + m + 2 = 0$$

Les abscisses des points $\boldsymbol{M_1}$ et $\boldsymbol{M_2}$ sont solutions de $\boldsymbol{x^2 - (4+m)x + m + 2 = 0}$

1_b_ Nombre de solutions de l'équation $x^2-(4+m)x+m+2=0$

$$\Delta=b^2-4ac=(4+m)^2-4(m+2)=m^2+4m+8$$

Signe de Δ en fonction de *m*.

Le discriminant de Δ, $\delta=4^2-4\times8=-16$, est strictement négatif donc Δ est toujours strictement positif et l'équation $x^2-(4+m)x+m+2=0$ admet toujours deux solutions distinctes.

1_c_ Condition nécessaire. Supposons que *A* soit le milieu de $[M_1M_2]$:

$$\begin{cases}\dfrac{x_1+x_2}{2}=1\\[2mm] \dfrac{y_1+y_2}{2}=3\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases}x_1+x_2=2\\ y_1+y_2=6\end{cases}$$

Le plus simple dans ce cas est de se servir de la somme des racines du trinôme du second degré. Si ce résultat n'a pas été vu en cours, on le démontre ainsi :

quand $\Delta\geqslant 0$:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$
$$ax^2+bx+c=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$$

Le coefficient *a* n'est pas nul, donc en identifiant les termes on obtient,

$$\begin{cases}-a(x_1+x_2)=b\\ ax_1x_2=c\end{cases}$$

$$\begin{cases}S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\\[2mm] P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

x_1 et x_2 sont solutions de l'équation $x^2-(4+m)x+m+2=0$ donc $x_1+x_2=4+m$

$x_1+x_2=2$ donc 2 = 4 + *m* et ***m* = -2**

Condition suffisante. Supposons que *m* = -2.

L'équation devient $x^2-2x=0$ ou $x(x-2)=0$ de solutions $x_1=0$ et $x_2=2$

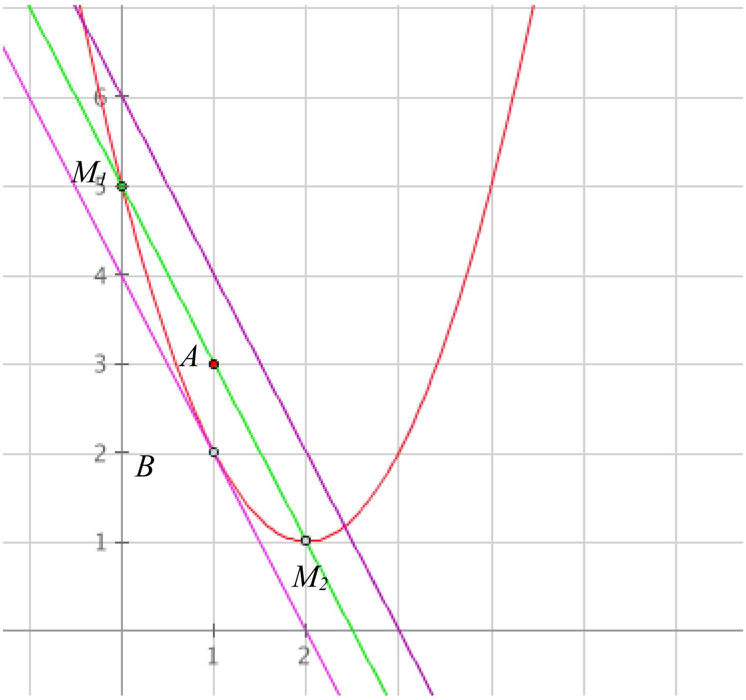
Les ordonnées des points M_1 et M_2 sont $y_1=-2x_1+3+2=5$ et $y_2=-2x_2+3+2=1$

Le milieu *I* de $[M_1\ M_2]$ a pour cordonnées :

$$\begin{cases}\dfrac{x_1+x_2}{2}=1\\[2mm] \dfrac{y_1+y_2}{2}=3\end{cases}$$

Le milieu *I* est le point *A*.

Conclusion. Le point *A* est le milieu de $[M_1\ M_2]$ si et seulement si *m* = -2.



D_4 Δ_{-2} D_p

2_a_ La droite D_p a pour équation : $y=-2x+p$
Les droites D_p et Δ_{-2} ont le même coefficient directeur donc sont parallèles.

2_b_ Recherche des points d'intersection de D_p et *P*.
Les cordonnées d'un point d'intersection sont solutions du système :

$$\begin{cases} y=-2x+p \\ y=x^2-4x+5 \end{cases}$$

Donc les abscisses sont solutions de l'équation :

$$x^2-4x+5=-2x+p$$
$$x^2-2x+5-p=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=4-4(5-p)=4p-16$$

Pour $p=4$, $\Delta=0$, et l'équation a une solution double $x_1=x_2=1.$
Le point d'intersection a pour ordonnées $y=-2+4=2$

Pour $p=4$ la droite et la parabole ont un seul point d'intersection B de coordonnées (1 ; 2).
La droite D_4 est la tangente à la parabole au point B.

Les points A et B ont la même abscisse.

B_ D est une droite d'équation $y=ax+b$ qui coupe la parabole P en deux points distincts [4] M_1 et M_2.

1_a_ Les couples de coordonnées des points d'intersection de D et P sont solutions du système :
$$\begin{cases} y=a\,x+b \\ y=x^2-4\,x+5 \end{cases}$$
Donc leurs abscisses sont solutions de l'équation :
$$x^2-4\,x+5=ax+b$$
Les abscisses des points M_1 et M_2 sont solutions de l'équation :
$$\boldsymbol{x^2-(4+a)\,x+5-b=0}.$$

1_b_ L'abscisse du milieu I de $[M_1M_2]$ est $\frac{x_1+x_2}{2}$. x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $x^2-(4+a)\,x+5-b=0$ donc en appliquant la propriété de la somme des racines du trinôme, on obtient $x_1+x_2=4+a$

L'abscisse du milieu I de $[M_1M_2]$ est $\frac{4+a}{2}$.

2_a_ La droite D a un seul point d'intersection avec la parabole P donc le discriminant de $x^2-(4+a)\,x+5-b=0$ est nul (Il y a une contradiction dans l'énoncé).
$$\Delta=0$$
$$(4+a)^2-4(5-b)=0$$
$$a^2+8\,a+4\,b-4=0$$
$$4\,b=4-a^2-8\,a$$
$$\boldsymbol{b=\frac{4-a^2-8\,a}{2}}$$

L'abscisse du point de tangence T est la solution double de $x^2-(4+a)\,x+5-b=0$ donc
$$x_T=x_1=x_2=-\frac{\text{coefficient de } x}{2}$$
Le point de tangence T a pour abscisse $\frac{4+a}{2}$.

2_b_ Les points T et I ont la même abscisse.

Morale.
On peut se servir de ce résultat pour construire la tangente à une parabole.
Attention. Ce résultat est valable pour toutes les paraboles mais seulement les paraboles.

Remarques.

Si on se sert de la propriété de la somme des racines, cet exercice est très simple et le calcul de b est inutile.

Vu que les variables a et b sont déjà utilisées, les formules du discriminant et des racines ne peuvent s'écrire sous la forme habituelle.