Dans ce genre d'exercice, Q.C.M., il ne faut pas justifier, donc le plus efficace est de tester les réponse. Premièrement on en élimine le plus possible, puis on teste, avec la calculatrice en général. Je donne les justifications pour votre enseignement.

exo73

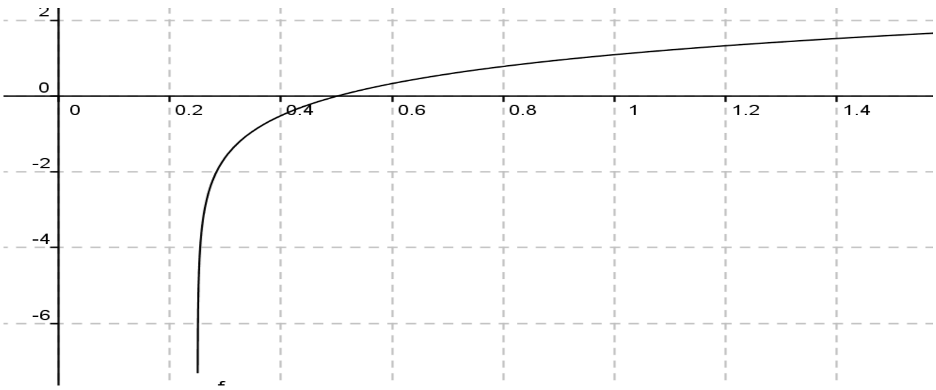
Déterminer pour chacune des affirmations suivantes laquelle est vraie. On ne demande pas de justification. Attention, toute réponse fausse sera sanctionnée.

1) La fonction $f(x)=\ln(4x-1)$ est définie sur :

a) $\mathbb{R}$ b) $\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$ c) $\left]-\infty;\frac{1}{4}\right[$

$f(x)$ existe si $4x-1>0$ donc réponse b.

Pratiquement. On trace la courbe.



On voit que *f* est définie à partir 0,2??

On va voir dans le tableau de valeurs.

2) Si $f(x)=2\ln(x)-x$ alors :

a) $f'(x)=\frac{2-x}{x}$ b) $f'(x)=\frac{2}{x}-x$ c) $f'(x)=\frac{1}{x}-x$

$f'(x)=\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}$ donc réponse a. N.B. On réduit toujours au même dénominateur pour trouver le signe de la dérivée. Ici, $x>0$ sur D_f donc le signe est celui du numérateur.

Pratiquement. On trace la courbe de *f* et les courbes des trois candidates dérivée. Quand la dérivée change de signe alors la fonction change de sens de variation.

On voit sur le graphique ci-dessous que la courbe violette coupe l'axe des abscisse en $x = 2$ correspondant à l'abscisse du sommet de la courbe de *f*. Les autres courbes coupent l'axe des abscisses en 1 et 1,4 ne correspondant pas à un sommet.

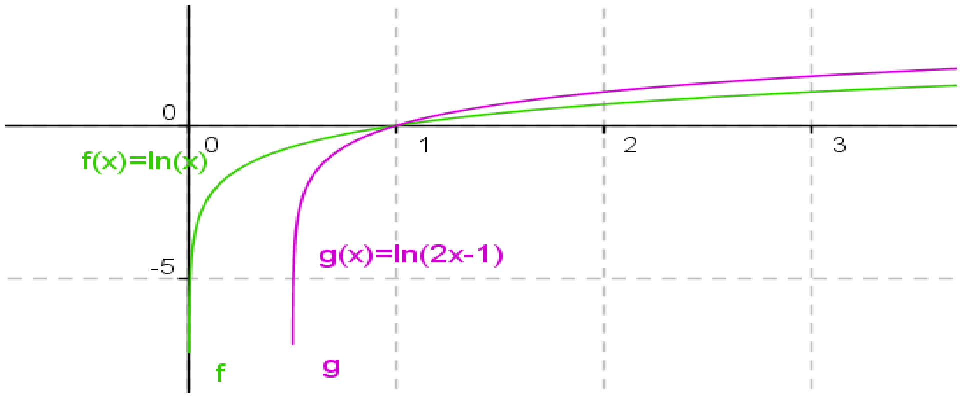
3) Si $\ln(x)=\ln(2x-1)$ alors :

a) $x=\frac{1}{2}$ b) $x=1$ c) $x=2$

$\ln a=\ln b$ implique $a = b$ (résultat de cours provenant de la croissance stricte de ln).

$x=2x-1$ donc $x=1$ donc réponse b.

Pratiquement. Les courbes se coupent au point d'abscisse 1.



4) L'ensemble S des solutions de l'inéquation $\ln(x)>\ln(2x-1)$ est :

a) $S=]-\infty;1[$ b) $]0;1[$ c) $]\frac{1}{2};1[$

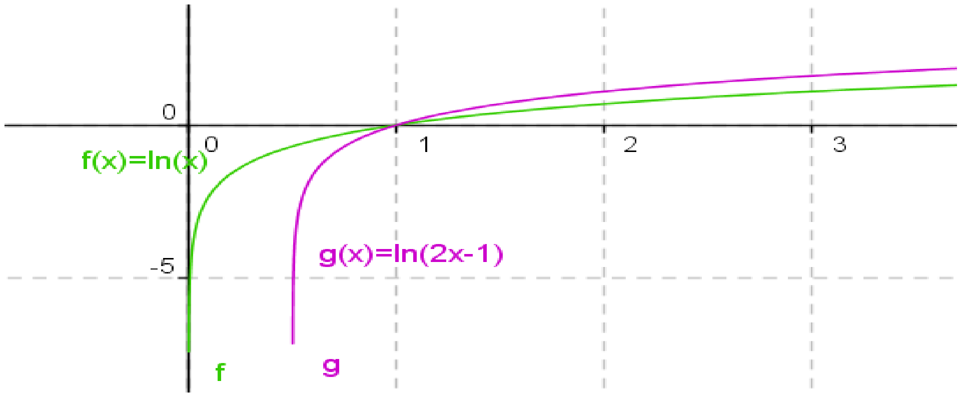
$\ln a>\ln b$ implique $a > b$ (résultat de cours provenant de la croissance stricte de ln).

$x>2x-1$ donc $1>x$

D'autre part, il faut que les deux membres existent : $\begin{cases} x>0 \\ 2x-1>0 \end{cases}$ donc $x>\frac{1}{2}$

Il faut répondre c.

Dans la pratique, on trace les courbes d'équation $y=\ln x$ et $y=\ln(2x-1)$ pour trouver la solution.



On voit que g est définie pour $x > 0{,}5$ et que les solutions sont]0,5 ; 1[.

On vérifie dans le tableau de valeurs.

5) ln(36) =

a) $\ln(4)\times\ln(9)$ b) $2(\ln 2+\ln 3)$ c) $(\ln 6)^2$

$\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$ et $\ln(a^n)=n\ln a$

$\ln(36)=\ln(6^2)=2\ln(6)=2\ln(2\times 3)=2(\ln(2)+\ln(3))$ donc réponse b.

Pratiquement. On calcule les quatre valeurs.

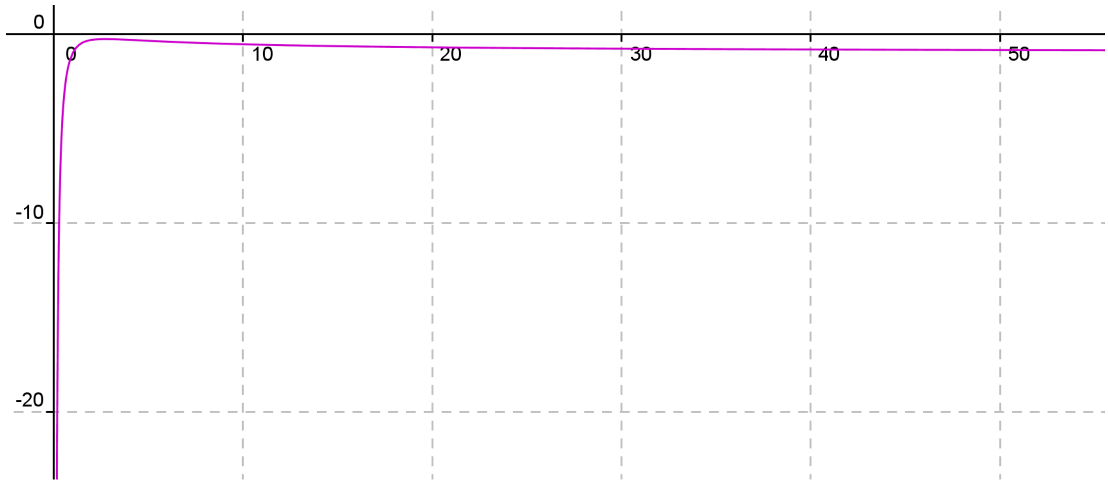
6) Si $f(x)=\frac{2\ln x}{x}-1$ alors :

a) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-1$ b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ c) $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ et $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ donc $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln x=-\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, réponse b.

N.B. On sait que $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ donc $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-1$. La droite d'équation y = -1 est une asymptote horizontale.

Pratiquement, pour répondre on trace la courbe.



7) Si $f(x)=\ln(x^6+1)$ alors :

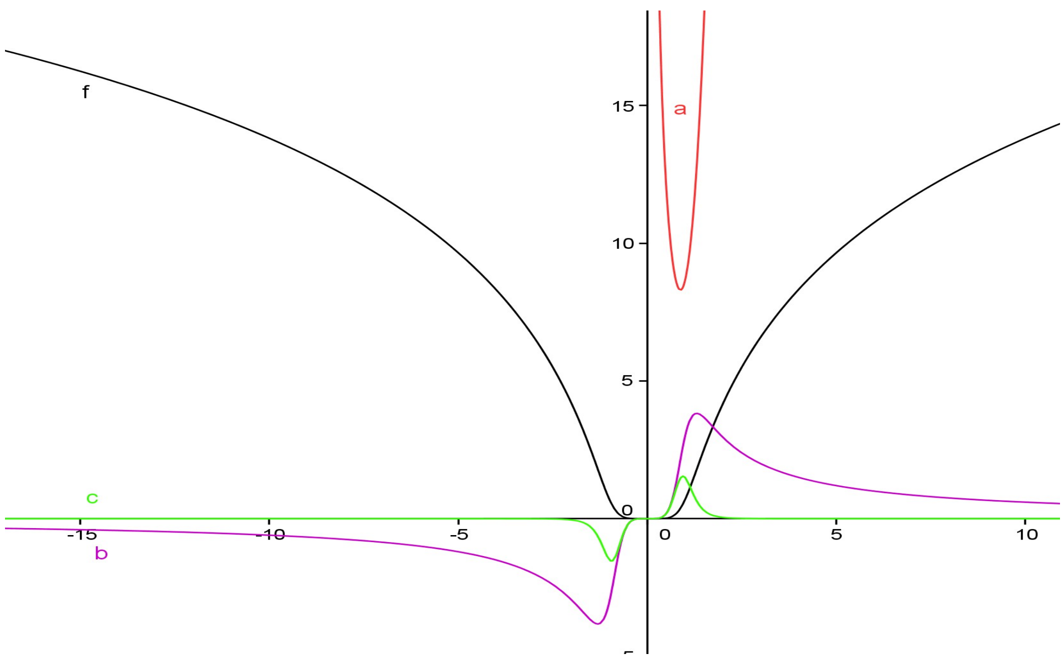
a) $f'(x)=\dfrac{6x^5}{\ln(x^6+1)}$ b) $f'(x)=\dfrac{6x^5}{x^6+1}$ c) $f'(x)=\dfrac{6x^5}{(x^6+1)^2}$

Je n'ai jamais vu dans une dérivée de ln(u) un logarithme au dénominateur.

Modèle : $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$

$u(x)=x^6+1$, $u'(x)=6x^5$ et $f'(x)=\dfrac{6x^5}{x^6+1}$ donc réponse b.

Attention. Si on trace les courbes, il y a deux candidates b et c.



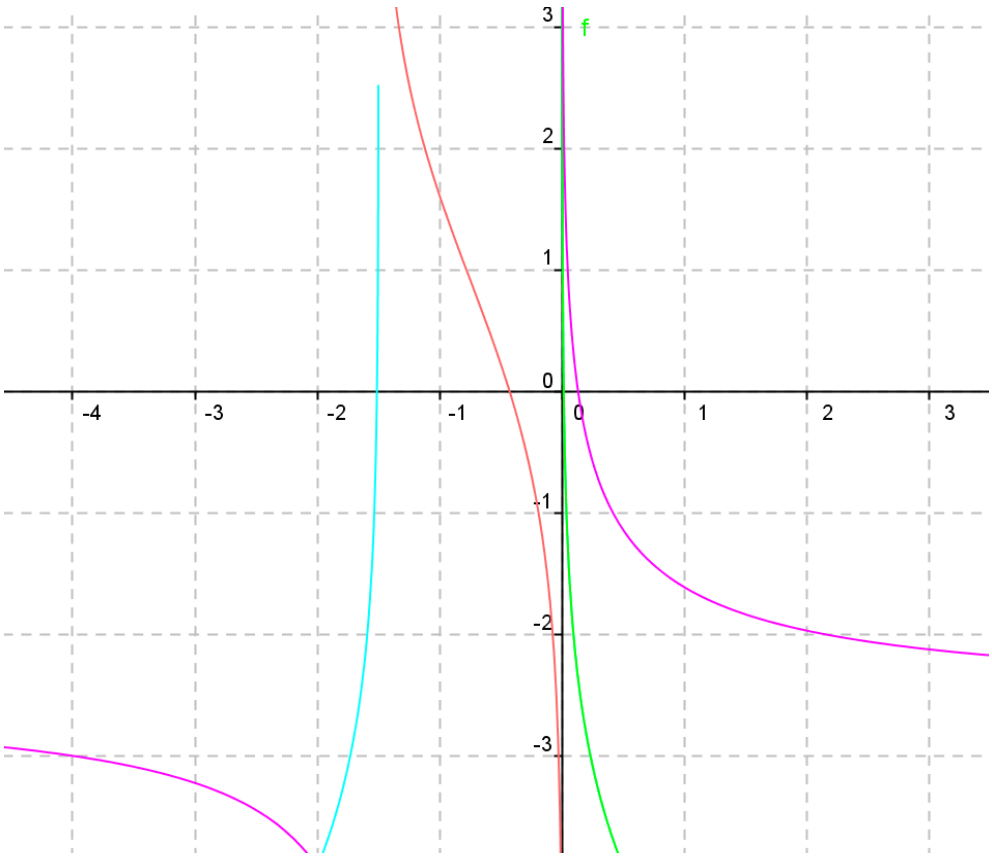
8) Si $f(x) = -\ln(2x+3) + \ln(x) - 2\ln(5x)$ alors f peut aussi s'écrire:

a) $f(x) = -\ln\left(\frac{(2x+3)x}{25x^2}\right)$ b) $f(x) = \ln\left(\frac{(-2x-3)x}{5x^2}\right)$ c) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{25(2x+3)x^2}\right)$

$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln(a^n) = n\ln a$ et $-\ln a = \ln\left(\frac{1}{a}\right)$

$$f(x) = -\ln(2x+3) + \ln(x) - 2\ln(5x) = \ln\left(\frac{1}{2x+3}\right) + \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{(5x)^2}\right)$$

$f(x) = \ln\left(\frac{x}{25(2x+3)x^2}\right)$ donc réponse c.



Attention. Pratiquement, si on trace les quatre courbes sur la calculatrice on obtient ceci.

La courbe de f de départ est en vert, a correspond à la courbe mauve, b correspond à la courbe orange et c correspond à la courbe bleue !!!

On dirait qu'aucune courbe ne correspond à f.

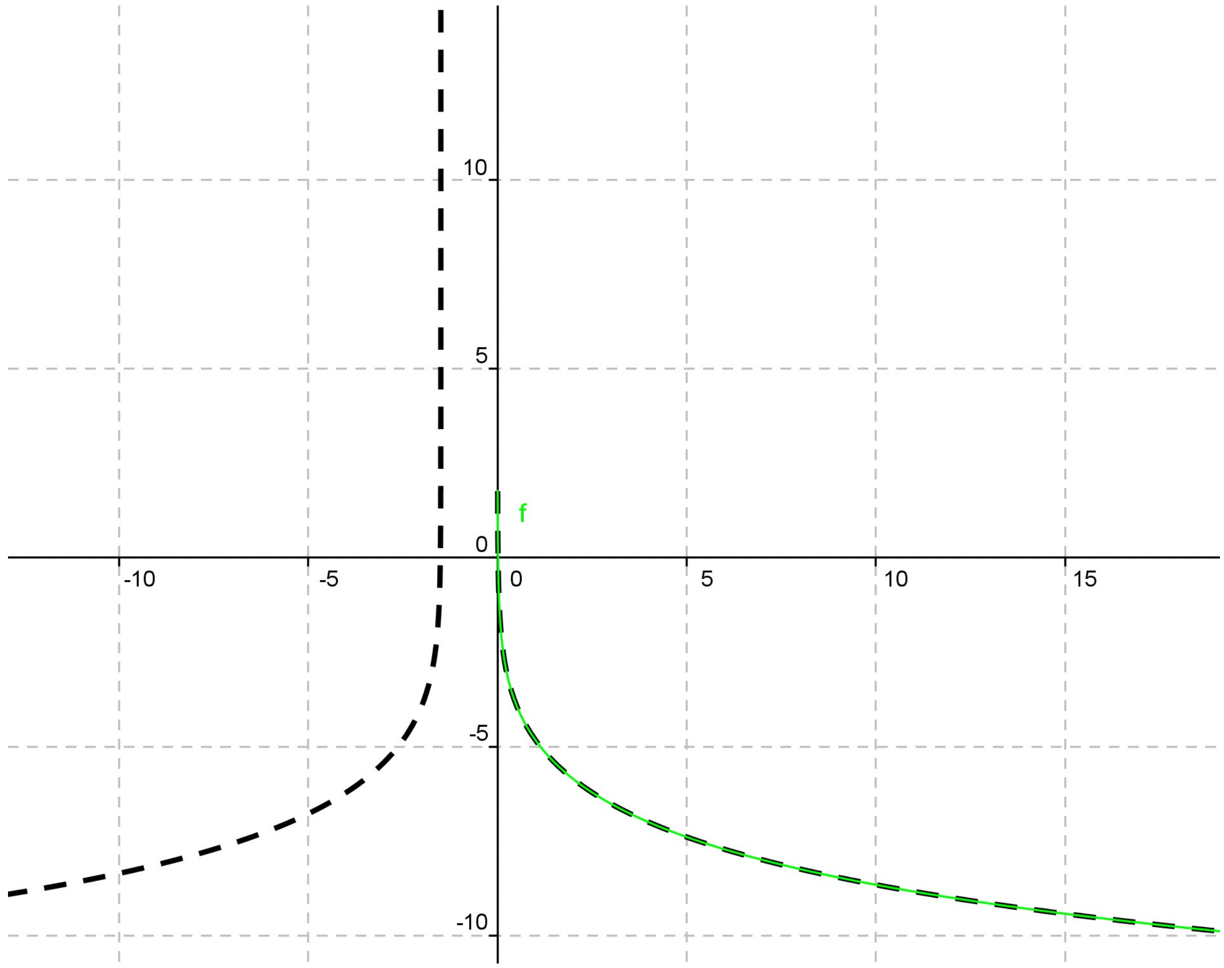
Explication. La fonction f définie par $f(x) = -\ln(2x+3) + \ln(x) - 2\ln(5x)$ n'a pas le même ensemble de définition que la fonction *g* définie par $f(x)=\ln\left(\frac{x}{25(2x+3)x^2}\right)$.

Les conditions d'existence ne sont pas les mêmes.

$f(x)$ existe si $\begin{cases} 2x+3>0 \\ x>0 \end{cases}$ donc $D_f=]0;+\infty[$.

$g(x)$ existe si $\frac{x}{2x+3}>0$ donc $D_g=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[\cup]0;+\infty[$.

Les deux fonctions et les deux courbes sont identiques sur $D_f=]0\ ;\ +\infty[$



La courbe de *f* est en vert et celle de *g* en pointillés noirs.

Sur le premier graphique on ne voit pas qu'une partie de la courbe de *g* est confondue avec celle de *f*

9) La courbe représentative de la fonction $f(x)=\ln(x+2)$ possède une asymptote verticale d'équation :

a) $y=2$ b) $x=-2$ c) $x=2$

$y = 2$ est l'équation d'une droite horizontale et $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = \ln 4$

Il reste la réponse b.

En effet, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$

10) Une primitive sur $]2\,;+\infty[$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$ est :

a) $F(x) = \ln(x^2+3)$ b) $F(x) = 2\ln(x^2+3)$ c) $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+3)$

On dérive F et on doit trouver f.

Modèle : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

a) $u(x) = x^2+3$, $u'(x) = 2x$ et $F'(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$

On déduit de a), pour b) $F'(x) = \dfrac{4x}{x^2+3}$ et pour c) $F'(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$ donc réponse c.

exo74

On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie sur ℝ

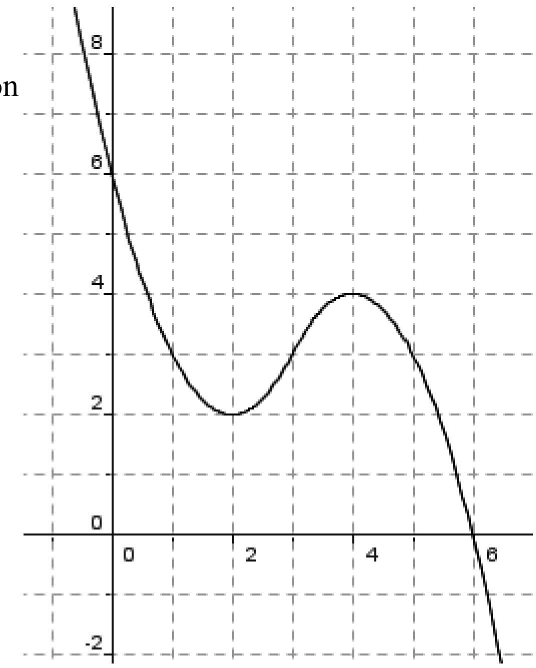
On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln(f(x))$

1) Donner le domaine de définition de g.

2) Donner par lecture graphique le tableau de variation de g.

3) Déterminer $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 6^-} g(x)$

4) Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) < 0$



Corrigé.

1) La fonction f est définie sur ℝ.
$g(x)$ existe *si* $f(x) > 0$.
D'après le graphique $D_g =]-\infty\ ;\ 6[$.

2) La fonction ln est strictement croissante donc f et $\ln f$ ont le même sens de variation.

x	$-\infty$		2		4		6
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$\ln 4$	$\searrow$	$-\infty$

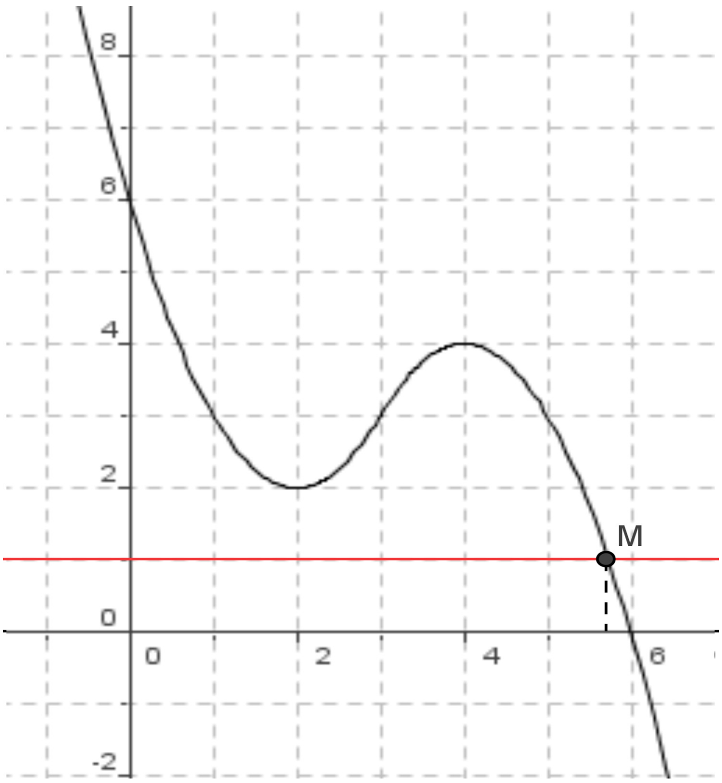
3)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{u\to+\infty} \ln u = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 6^-} f(x) = 0^+\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 6^-} g(x) = -\infty$$

4) Si $g(x)<0$ alors $\ln\left(f(x)\right)<0$ et $f(x)<1$

On trace la droite d'équation $y = 1$.



S =] 5,7 ; 6 [