exo62

On considère la fonction f définie sur] 0 ; + ∞ [par $f(x) = \ln x + x + 1$.

1.Limites de f aux bornes du domaine.

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \text{ donc } \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to +\infty} x = +\infty \text{ donc } \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

2. Asymptote au voisinage de 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ donc l'axe des abscisses est une asymptote.

3. La droite d d'équation $y = x + 1$ est-elle une asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$?

$$f(x)-(x+1) = \ln x$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(f(x)-(x+1)\right) = \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \notin \mathbb{R}$$

Donc la droite d n'est pas une asymptote à la courbe de f.

4.Variations.

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{x+1}{x}$$

Sur D_f, $x > 0$ donc f est strictement croissante sur D_f.

5.a) Nombre de solutions de $f(x) = 0$.

Les fonctions logarithme et polynômes sont continues sur leur domaine de définition donc f est continue sur $]0 ; +\infty[$.

La fonction f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ et $0 \in]-\infty ; +\infty[$ (intervalle image de $]0 ; +\infty[$).

D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0 ; +\infty[$.

b) Encadrement de α.

$$f(0{,}27) < 0 \text{ et } f(0{,}28) > 0$$

Donc $0{,}27 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}28$.