ES_Asie_juin_2002

On rappelle que l'euro est la nouvelle monnaie en usage en France.

Le but du problème est d'étudier le coût marginal et le coût total de production d'un produit dans une entreprise.

L'objet de la partie A est de déterminer une fonction h satisfaisant à des conditions données.

L'objet de la partie B est l'étude de propriétés d'une fonction f.

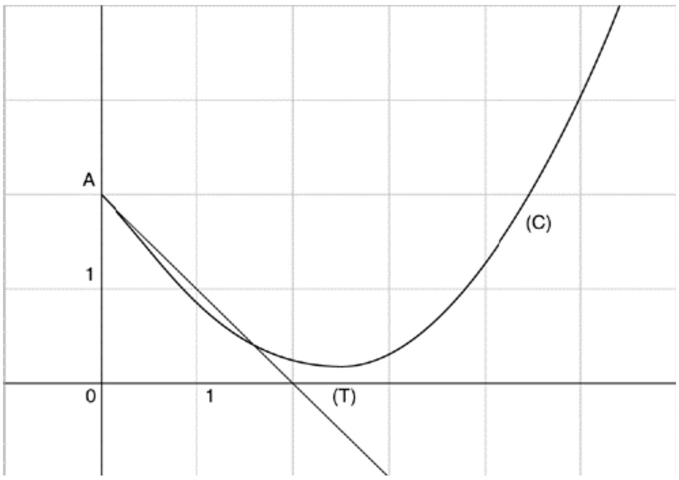
L'objet de la partie C est d'utiliser certains résultats de la partie A pour répondre à des questions d'ordre économique.

Partie A

La courbe C, donnée ci-dessous, est la courbe représentative d'une fonction h définie sur $[0;+\infty[$.

Le point A a pour coordonnées (0;2).

La droite (T) est tangente à la courbe C au point A.



1. Préciser $h(0)$.

Déterminer à l'aide d'une lecture graphique le nombre dérivé $h'(0)$. (Justifier la réponse).

2. La fonction h, définie sur $[0;+\infty[$ est de la forme :

$h(x) = ax^2 + bx + c + 2\ln(x+1)$

où a, b et c sont des nombres réels.

On note h' la dérivée de la fonction h.

Exprimer $h'(x)$ en fonction de a et b.

3. On donne $h'(3) = \dfrac{1}{2}$.

En utilisant ce résultat et les résultats de la question **1.**, déterminer chacune des valeurs a, b et c.

Partie B

Soit f la fonction définie sur I = [0;5] par $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 3x + 2 + 2\ln(x+1)$.

1. a. Calculer la dérivée f' de la fonction f.

b. Montrer que pour tout x de l'intervalle I : $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{x+1}$

c. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle I.

d. En déduire les variations de f sur [0;5]

2. Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - x$.

a. Calculer la dérivée g' de la fonction g.

b. En déduire une primitive F de la fonction f sur I $\Big($une primitive de x^n est $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\Big)$.

c. Calculer la valeur exacte, puis la valeur approchée à 10^{-3} près, de l'intégrale $\int_0^5 f(x)\,dx$

Aide : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Partie C

Sur l'intervalle [0;5], la fonction f de la partie précédente représente le coût marginal de production d'un liquide conditionné en flacons d'un litre, en fonction de la quantité produite.

On rappelle que le coût marginal de production est assimilé à la dérivée du coût total.

x représente le volume en **milliers** de litres, x variant sur l'intervalle [0;5].

$f(x)$ représente le coût marginal en **milliers** d'euros.

1. Quel est le coût marginal, en euros, du 3 000^{e} litre produit ?

2. Pour quelle quantité produite le coût marginal est-il minimum ? (donner la valeur au litre près).
3. Les coûts fixes sont de 1 000 euros.
a. Montrer, en utilisant le résultat de la **partie B, question 2.b.**, que le coût total est donné par l'expression définie sur [0;5] par :

$$C(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2+2(x+1)\ln(x+1)+1$$

b. Calculer C(5) – C(0) à un euro près et interpréter en termes de coût cette différence.
Comparer ce résultat à celui trouvéà la **partie B question 2.c.** et expliquer cette réponse.