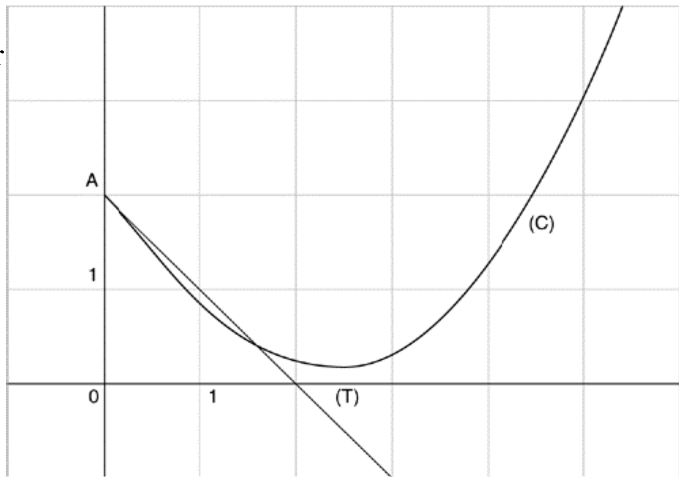
ES_Asie_juin_2002

.

Partie A

1. La courbe *C*, donnée ci-dessous, est la courbe représentative d'une fonction *h* définie sur [0;+∞[.
Le point A a pour coordonnées (0 ; 2) appartient à *C* donc *h*(0) = 2.

La droite (T) est tangente à la courbe *C* au point A de coordonnées (0 ; 2) et (T) passe par le point B de coordonnées (1; 1) donc le coefficient directeur de (T) est -1 et *h'*(0)=-1.



2. La fonction *h*, définie sur [0;+∞[est de la forme :

$$h(x)=ax^2+bx+c+2\ln(x+1)$$

$$h'(x)=2ax+b+\frac{2}{x+1}$$

3. *h'*(0)=-1 donc $b+2=-1$

h'(3) = $\frac{1}{2}$. donc $6a+b+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

h(0) = 2 donc $c=2$

On résout le système :

$$\begin{cases} b+2=-1 \\ 6a+b=0 \\ c=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-3 \\ 6a=3 \\ c=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-3 \\ c=2 \end{cases}$$

Donc $h(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+2+2\ln(x+1)$

La partie B confirme ce résultat.

Partie B

Soit *f* la fonction définie sur I = [0 ; 5] par $f(x)=\frac{x^2}{2}-3x+2+2\ln(x+1)$.

1. **a.** $f'(x)=x-3+\frac{2}{x+1}$

b. $f'(x)=\frac{(x-3)(x+1)+2}{x+1}$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-1}{x+1}$$

c. Signe de la fonction f' sur l'intervalle I.
$x+1>0$ sur I donc f' est du signe du numérateur x^2-2x-1

$$\Delta=b^2-4ac=8$$
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=1+\sqrt{2}$$

$x_1<0<x_2<5$ d'après la règle du signe du trinôme du second degré :

$$f'<0 \text{ sur } [0\,;x_2[\text{ et } f'>0 \text{ sur }]x_2\,;5]$$

d. D'après le résultat précédent :

f est strictement décroissante sur $[0\,;x_2[$ et strictement croissante sur $]x_2\,;5]$

2. Soit g la fonction définie sur I par $g(x)=(x+1)\ln(x+1)-x$.

a. Fonction dérivée de g.

$$\text{Modèles : } (uv)'=u'v+uv' \text{ et } (\ln w)'=\frac{w'}{w}$$

$$g'(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}(x+1)-1$$
$$g'(x)=\ln(x+1)$$

b. Primitive F de la fonction f sur I
$g'(x)=\ln(x+1)$ donc g est une primitive de k définie par $k(x)=\ln(x+1)$
Une primitive de x^n est $\frac{x^{n+1}}{n+1}$
Si H est une primitive de h alors pour k constant, kH est une primitive de kh.

$$F(x)=\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+2x+2g(x)$$
$$F(x)=\frac{x^3}{6}-\frac{3x^2}{2}+2(x+1)\ln(x+1)$$

c. $\int_0^5 f(x)\,dx=F(5)-F(0)=\frac{5^3-9\times5^2+12\times6\ln6}{6}=\frac{72\ln6-100}{6}$

Partie C

1. La fonction f représente le coût marginal de production en k€ (kilo-euro) en fonction du volume x, exprimé en kl (kilo-litres) donc le coût marginal du 3 000e litre est $f(3)\simeq0{,}272\,59$ donc 0,27 € pour produire un litre de plus.

Attention aux unités, le coût marginal est le coût supplémentaire pour produire une unité de plus. Donc ici, 2 725,59 € pour 1 000 litres de plus d'où le résultat. On peut vérifier en calculant $C(3{,}001)-C(3)$ on obtient 0,000 27 et donc 0,27 € .

2. D'après l'étude de *f* le coût marginale minimum est $f(x_2)=0{,}127\,47$ atteint en $x_2=1+\sqrt{2}$.
Donc le coût marginale est minimum pour une production de 2 414 litres, au litre près.

3.

a. Le coût marginal de production est assimilé à la dérivée du coût total donc le coût total est une primitive de *f*.

$$C(x)=F(x)+k$$

Les coûts fixes sont de 1 000 euros donc $C(0) = 1$ (en k€, kilo-euro).

$$C(0)=1$$
$$F(0)+k=1$$
$$k=1$$

Donc $C(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2+2(x+1)\ln(x+1)+1$

b. $C(5)-C(0)\simeq 4{,}834$

Donc le coût hors frais fixes, coût variable, pour produire 5 000 litres est 4 834 € à un euro près.

On remarque que $C(5)-C(0)=\int_0^5 f(x)\,dx$

La fonction *C* est une primitive de *f* donc ce résultat découle directement de la définition de l'intégrale.