exo69

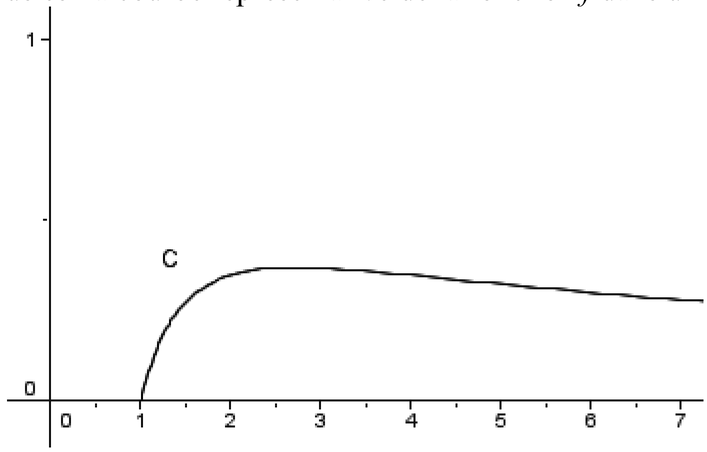
Dans cet exercice, sont envisagées deux manières différentes de démontrer la propriété (P) :

« Pour tout entier $n \geqslant 4$ on a $2^n \geqslant n^2$ »

Première méthode

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

La courbe (C) ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.



2. a) Après avoir calculé $f'(x)$, où f' désigne la dérivée de f, préciser les variations de f sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 4$, on a $\dfrac{\ln n}{n} \leqslant \dfrac{\ln 4}{4}$.

c) Comparer $\dfrac{\ln 4}{4}$ et $\dfrac{\ln 2}{2}$.

d) En déduire que la propriété (P) est vraie

Deuxième méthode pour les spé maths.

1. Vérifier que, pour tout entier n, on a: $2n^2-(n+1)^2=(n-1)^2-2$
2. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 4$, on a: $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.
3. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que la propriété (P) est vraie.