exo69

(P) est la propriété :

« Pour tout entier $n \geqslant 4$ on a $2^n \geqslant n^2$ »

Première méthode

2 a. f est la fonction définie sur l'intervalle [1;+∞[par $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$x^2>0$ sur D_f donc f' a le même signe que le numérateur.

$$1-\ln x>0$$
$$1>\ln x$$
$$e>x$$

$f'>0$ sur $[1\ ;e[$ et $f'<0$ sur $]e\ ;+\infty[$ donc f est strictement croissante sur [1 ; e[et strictement décroissante sur $]e\ ;+\infty[$

b. La fonction f est strictement décroissante sur $]e\ ;+\infty[$ et e < 4 donc pour tout entier $n \geqslant 4$:

$$\frac{\ln n}{n}\leqslant\frac{\ln 4}{4}.$$

c. $\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2^2}{4}=\frac{2\ln 2}{4}=\frac{\ln 2}{2}$

d. On déduit de c et d que pour tout entier $n \geqslant 4$:

$$\frac{\ln n}{n}\leqslant\frac{\ln 2}{2}.$$
$$2\ln n\leqslant n\ln 2$$
$$\ln n^2\leqslant\ln 2^n$$
$$n^2\leqslant 2^n$$

Donc « pour tout entier $n \geqslant 4$ on a $2^n \geqslant n^2$ »

Deuxième méthode pour les spé maths.

1. $2n^2-(n+1)^2=2n^2-n^2-2n-1=n^2-2n+1-2=(n-1)^2-2$

2. Pour tout entier $n \geqslant 4$:

$$(n-1)^2\geqslant 3^2$$
$$(n-1)^2-2\geqslant 3^2-2\geqslant 0$$

D'après la relation démontrée au 1 :

$$2n^2-(n+1)^2\geqslant 0$$
$$2n^2\geqslant(n+1)^2$$

3. Soit P_n la propriété : « $2^n\geqslant n^2$ »

Remarquez bien la différence entre (P) et P_n

Initialisation

$2^4=16=4^2$ donc P_4 est vraie

Hérédité
n est un entier supérieur à 4.
On suppose P_n vraie.

$$2^{n+1}=2\times 2^n$$

En appliquant P_n :

$$2^{n+1}=2\,n^2$$

$n\geqslant 4$, d'après le résultat du 2, :

$$2^{n+1}\geqslant (n+1)^2$$

P_{n+1} vraie.

Conclusion
Pour tout entier $n \geqslant 4$, P_n est vraie donc (P) est vraie.