La fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \text{pour } x\in\mathbb{R}^*,\ f(x)=e^{\frac{-1}{x^2}} \\ f(0)=0 \end{cases}$

On peut remarquer que cette fonction est paire et donc travailler sur $\mathbb{R}^+$

1 Etude de la continuité en 0.

Pour $x\neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{x^2}=-\infty$ et $\lim\limits_{u\to -\infty} e^u=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

La fonction *f* est continue en 0

2 Etude de la dérivabilité en 0.

$T=\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{e^{\frac{-1}{h^2}}}{h}$

On pose $y=\frac{1}{h^2}$, $h>0$ donc $h=\sqrt{\frac{1}{y}}$ et quand *h* tend vers 0, *y* tend vers $+\infty$.

$T=\sqrt{y}\,e^{-y}=\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{y}{e^y}$

$\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}=+\infty$ donc $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y}=0$ et $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{y}}=0$

Donc $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=0$

Par symétrie : $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=0$

La fonction *f* est dérivable en 0 et admet pour nombre dérivé $f'(0)=0$

La courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

3 Etude de la dérivabilité de f' en 0.

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables. D'après le résultat de la question 2, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$(e^u)'=u'e^u$ donc pour $x\neq 0$, $f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{\frac{-1}{x^2}}$

$T=\frac{f'(h)-f'(0)}{h}=2\frac{e^{\frac{-1}{h^2}}}{h^4}$

Par le même changement de variable qu'à la question 2 : $T=2\frac{y^2}{e^y}$

$\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y^2}=+\infty$ donc $\lim\limits_{y\to+\infty}2\frac{y^2}{e^y}=0$

La fonction f' est dérivable en 0 et admet pour nombre dérivé $f''(0)=0$

La fonction f est dérivable deux fois en 0