Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $A(n)=n^4+1$.
L'objet de l'exercice est l'étude des diviseurs premiers de $A(n)$

I_ Quelques résultats

1_ Étudier la parité de l'entier $A(n)$.

2_ Montrer que, quel que soit l'entier n, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.

3_ Montrer que tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n.

4_ Montrer que, pour tout entier d diviseur de A(n) :

$$n^8 \equiv 1 \quad mod\ d.$$

II_ Recherche de critères

Soit d un diviseur de A(n). On note s le plus petit des entiers naturels non nuls k tels que $n^k \equiv 1\ mod\ d.$

1_Soit k un tel entier. En utilisant la division euclidienne de k par s, montrer que s divise k.

2_ En déduire que s est un diviseur de 8.

3_ Montrer que si, de plus, d est premier, alors s est un diviseur de d −1. On pourra utiliser le petit théorème de Fermat.

III_ Recherche des diviseurs premiers de A(n) dans le cas où n est un entier pair.

Soit p un diviseur premier de A(n). En examinant successivement les cas s = 1, s = 2 puis s = 4, conclure que p est congru à 1 modulo 8.

IV_ Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Appliquer ce qui précède à la recherche des diviseurs premiers de A(12).

Indication : la liste des nombres premiers congrus à 1 modulo 8 débute par 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137, …

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation (E) : 7x −6y =1 où x et y sont des entiers naturels.

1_ Donner une solution particulière de l'équation (E)

2_ Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation : $7^n - 3\times 2^m = 1$ (F).

I. On suppose que $m \leqslant 4$.

Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.

II. On suppose maintenant que $m \geqslant 5$.

1_ Montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1\,(mod\ 32)$.

2_En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.

3_ En déduire que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1\,(mod\ 5)$.

4_ Pour $m \geqslant 5$, existe-t-il des couples (n, m) d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?

III Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).