Les relations

I Relation.

1 Définition.

Soit deux ensembles *A* et *B,* une relation $\Re$ de *A* dans *B* fait correspondre à certains élément de *A* un ou plusieurs éléments de *B*.

A est l'ensemble de départ.
B est l'ensemble d'arrivée.

2 Exemple.

La relation *divise* de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On note $|$ cette relation.
0 n'est en relation avec aucun élément.
1 est en relation avec tout $n\in\mathbb{N}$.
2 est en relation avec tout nombre pair.

On note $2|4$, $5|35$.

II Graphe d'une relation.

1 Produit cartésien de deux ensembles.

Soit deux ensembles *A* et *B*, le produit cartésien de *A* et *B*, noté $A\times B$, est l'ensemble des couples (a,b) où *a* est un élément de *A* et *b* est un élément de *B*.

$$A\times B=\{(a,b),\ a\in A,\ b\in B\}$$

2 Graphe de $\Re$.

Le graphe de $\Re$ est le sous ensemble de $A\times B$ des couples en relation.

$$G_{\Re}=\{(a,b),\ a\Re b,\ a\in A,\ b\in B\}$$

<u>Une relation est complètement définie par son ensemble de départ, son ensemble d'arrivée et son graphe.</u>

3 Exemple.

Soit *A* l'ensemble des entiers naturels inférieur ou égaux à 5 et la relation *divise* de *A* dans *A*.

$$G_{|}=\{(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,0),(2,2),(2,4),(3,0),(3,3),(4,0),(4,4),(5,0),(5,5),\}$$

Las relaciones

I Relación.

1 Definición.

Dados dos conjuntos *A* y *B,* una relación $\Re$ de *A* en *B* pone en correspondencia unos elementos de *A* a uno o mas elementos de *B*.

A es el conjunto de partida.
B es el conjunto de llegada.

2 Ejemplo.

La relación *divide* de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. Representamos $|$ está relación.
0 no tiene correspondencia.
1 esta en relación con cada $n\in\mathbb{N}$.
2 esta en relación con cualquier numero par.

Lo representamos $2|4$, $5|35$.

II Grafo de una relación.

1 Producto cartesiano de dos conjuntos.

Sea dos conjuntos *A* y *B*, el producto cartesiano de *A* y *B*, lo representamos $A\times B$, es el conjunto de pares ordenados (a,b) donde *a* pertenece a *A* y *b* pertenece a *B*.

$$A\times B=\{(a,b),\ a\in A,\ b\in B\}$$

2 Grafo de $\Re$.

El grafo de $\Re$ est le subconjunto de $A\times B$ de los pares ordenados en relación.

$$G_{\Re}=\{(a,b),\ a\Re b,\ a\in A,\ b\in B\}$$

<u>Una relación esta completamente definida al conocer el conjunto de partida, el conjunto de llegada y su grafo.</u>

3 Ejemplo.

Sea *A* el conjunto de los números naturales inferiores o iguales a 5 y la relación *divide* de *A* en *A*.

$$G_{|}=\{(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,0),(2,2),(2,4),(3,0),(3,3),(4,0),(4,4),(5,0),(5,5),\}$$

III Ensemble de définition et ensemble image.

1 Ensemble de définition.

L'ensemble de définition d'une relation est le sous-ensemble de l'ensemble de départ dont les éléments sont en relation avec au moins un élément de l'ensemble d'arrivée.

Soit la relation : $\mathfrak{R} : A \rightarrow B$

$D_{\mathfrak{R}}=\{a, a \in A \text{ et il existe } b \in B \text{ tel que } a\,\mathfrak{R}\, b\}$

Autre définition :

$D_{\mathfrak{R}}=\{a, a \in A \text{ et il existe } b \in B \text{ tel que } (a, b) \in G_{\mathfrak{R}}\}$

2 Ensemble image.

Soit la relation : $\mathfrak{R} : A \rightarrow B$. Si $a\,\mathfrak{R}\, b$ on dit que b est une image de a.

L'ensemble image est l'ensemble des images.

$\operatorname{Im} \mathfrak{R}=\{b, b \in B \text{ et il existe } a \in A \text{ tel que } a\,\mathfrak{R}\, b\}$

3 Exemple.

Soit la relation $\mathfrak{R} : A \rightarrow B$, telle que

$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B=\{a, b, c, d, e, f\}$

$G_{\mathfrak{R}}=\{(1,b),(2,c),(2,e),(4,e)\}$

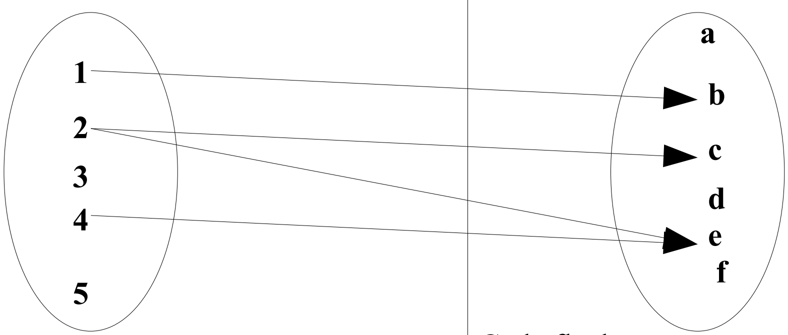
L'ensemble de définition est $D_{\mathfrak{R}}=\{1, 2, 4\}$

L'ensemble image est $\operatorname{Im} \mathfrak{R}=\{b, c, e\}$

IV Représentation graphique.

Voici les représentations de la relation ci-dessus.

1 Diagramme.



Chaque flèche représente un couple du graphe.

III Dominio y rango (recorrido).

1 Dominio.

El dominio de una relación es el subconjunto del conjunto de partida cuyos elementos tienen correspondencia con al menos un elemento del conjunto de llegada.

Sea la relación : $\mathfrak{R} : A \rightarrow B$

$D_{\mathfrak{R}}=\{a, a \in A \text{ y existe } b \in B \text{ verificando } a\,\mathfrak{R}\, b\}$

Definición equivalente :

$D_{\mathfrak{R}}=\{a, a \in A \text{ y existe } b \in B \text{ verificando } (a, b) \in G_{\mathfrak{R}}\}$

2 Rango o recorrido.

Sea la relación : $\mathfrak{R} : A \rightarrow B$. Si $a\,\mathfrak{R}\, b$ se dice que b es una imagen de a.

El rango o recorrido es el conjunto formado con todas la imágenes.

$\operatorname{Im} \mathfrak{R}=\{b, b \in B \text{ y existe } a \in A \text{ verificando } a\,\mathfrak{R}\, b\}$

3 Ejemplo.

Sea la relación $\mathfrak{R} : A \rightarrow B$, verificando

$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B=\{a, b, c, d, e, f\}$

$G_{\mathfrak{R}}=\{(1,b),(2,c),(2,e),(4,e)\}$

El dominio es $D_{\mathfrak{R}}=\{1, 2, 4\}$

El rango o recorrido es $\operatorname{Im} \mathfrak{R}=\{b, c, e\}$

IV Representación gráfica.

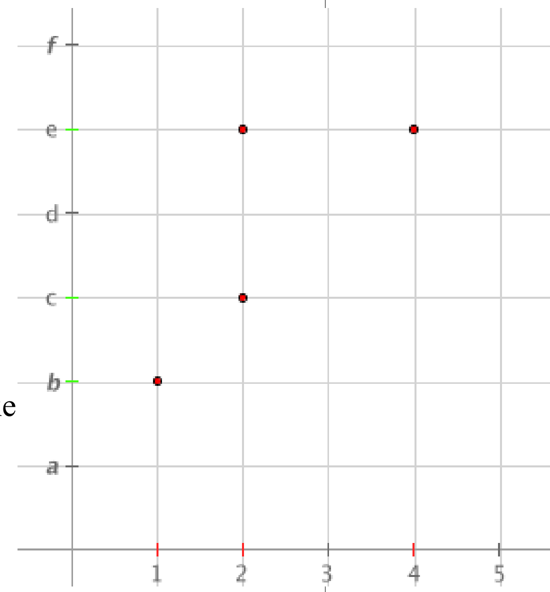
Al seguir, dos representaciónes de la relación del último ejemplo.

1 Diagrama.

Cada flecha representa un par ordenado del grafo.

2 Représentation dans le plan.

Voici la même relation représentée dans le plan.



Chaque point représente un couple du graphe.

L'ensemble de départ *A* est sur l'axe horizontal et celui d'arrivée est sur l'axe vertical.

L'ensemble de définition est l'ensemble des nombres de l'axe horizontal correspondant à un trait rouge (peu visible).

C'est aussi l'ensemble des abscisses des points du graphique.

L'ensemble image est l'ensemble des nombres de l'axe vertical correspondant à un trait vert (peu visible).

C'est aussi l'ensemble des ordonnées des points du graphique.

2 Representación en el plano.

La misma relación representada en el plano.

Cada punto es la imagen de un par ordenado del grafo.

El conjunto de partida *A* se lee en el axis horizontal y el de llegada en el axis vertical.

El dominio es el conjunto de los números del axis horizontal con marca roja (no es muy visible).

Es también el conjunto de las abscisas de los puntos de la gráfica.

El rango o recorrido es el conjunto de los números del axis vertical con marqua verde (no es muy visible).

Es también el conjunto de las ordenadas de los puntos de la gráfica.